

Praktische Grundlagen von Regelsystemen

Ablauf- und Signalflussdiagramm mit mathematischer Optimierung

E. Dittmar, Gummersbach

In [1] wurde gezeigt, dass sich in der Praxis der digitale PID-Regel-Algorithmus auf die Algebra und die Grundlagen der numerischen Mathematik zurückführen lässt. Dieser Beitrag beschreibt das kombinierte Ablauf- und Signalflussdiagramm. Darüber hinaus wird der Ansatz zur mathematischen Optimierung von digitalen Regelungen weitergeführt.

1 Ablauf und Signalfluss mit Ansatz zur Optimierung

Das Ablaufdiagramm in Bild 1 ist die komplett gezeichnete mathematische Struktur des PID-Regel-Algorithmus mit Signalflussdiagramm des Systems im geschlossenen digitalen Regelkreis. Gewöhnlich werden das Signalflussdiagramm und das Ablaufdiagramm getrennt gezeichnet. Hier ist es so entwickelt, dass beide einen geschlossenen Regelkreis bilden. Ferner ist die betragsoptimale Auslegung ebenfalls eingetragen.

Die Ordnung des Systems im Signalflussdiagramm bestimmt dabei die Art des Regel-Algorithmus. Nach der betragsoptimalen Auslegung ist ein System 3. Ordnung das höchste, das durch einen PID-Regel-Algorithmus beherrscht werden kann, ein System 2. Ordnung durch einen PI-Regel-Algorithmus. Für ein System 1. Ordnung errechnet sich ein reiner I-Regel-Algorithmus.

Das Ablaufdiagramm mit dem PID-Regel-Algorithmus nach der Rechteckregel wurde speziell für den Drehstromantrieb als schnelles System entwickelt. Ein voller Regelungszyklus beginnt mit der Übernahme der digitalen Regelgröße x_i in den PID-Algorithmus. Es wird die digitale Regeldifferenz x_{di} aus der Regelgröße x_i (abgetastet aus der analogen Stammfunktion) und dem Zahlenwert der Führungsgröße w gebildet und steht als Zahlenwert im Rechenpeicher. Die Multiplikation der optimalen Verstärkung ergibt den P-Anteil, der zur späteren Addition zur Gesamtformel abgespeichert wird.

Danach wird mit der Integrierzeitkonstanten T_I der I-Anteil gebildet. Zusammen mit dem P-Anteil ergibt sich der PI-Regel-Algorithmus. Bei ihm sind die optimalen Verstärkungsfaktoren K_P und K_{Pm} noch identisch, da gilt $T_D = 0 \rightarrow T_V = 0$.

In der vorletzten Stufe wird aus der Regeldiffe-

renz x_{di} zusammen mit der Differenzierzeitkonstanten T_D der D-Anteil gebildet. In der letzten Stufe werden der P-, I- und D-Anteil zur Endformel des PID-Regel-Algorithmus summiert. Mit dem D-Anteil im Algorithmus beginnt

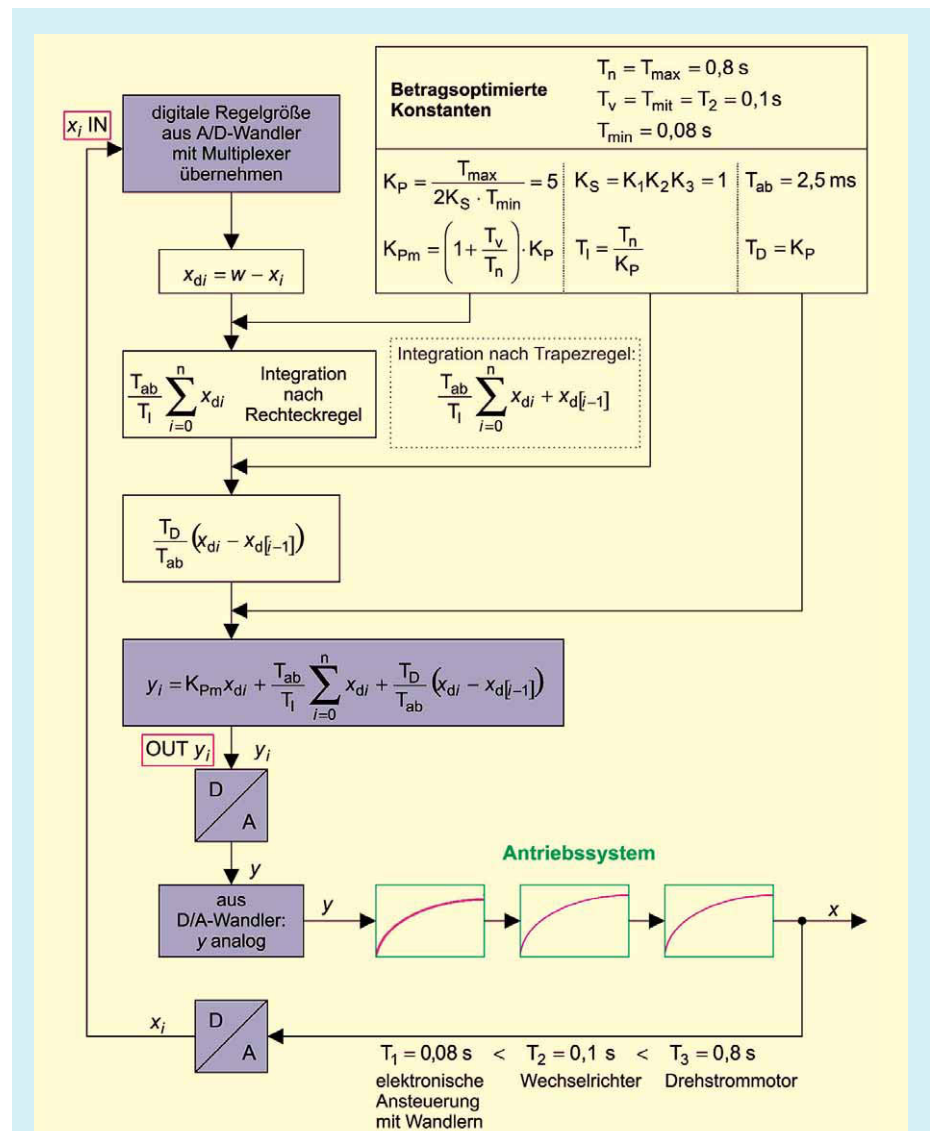
die Differenzierung zwischen dem Verstärkungsfaktor K_P und der Betragsoptimierung K_{Pm} , wie dies bei der Optimierung nach Ziegler-Nichols gezeigt wurde.

Der D/A-Wandler wandelt die digitale Stellgröße y_i in die analoge Stellgröße y als Eingangsgröße des Systems um. Die Regelgröße x als analoge Ausgangsgröße des zu regelnden Systems wird über den A/D-Wandler dem PID-Regel-Algorithmus wieder zugeführt. Damit ist der digitale Regelkreis geschlossen und ein Reglerzyklus durchlaufen.

2 Mathematische Optimierung von digitalen Regelungen

2.1 Selbstoptimierung

Grundsätzlich kann man für die digitalen Regelungen – wie gezeigt – das empirische Verfahren von Ziegler-Nichols anwenden. Bei schnellen Regelungen jedoch ist ein mathemati-



1 Ablaufdiagramm des PID-Regel-Algorithmus mit Signalflussdiagramm und selbstoptimierender betragsoptimaler Auslegung

Autor

Prof. Edgar Dittmar ist beamteter Professor für elektronische Steuerungstechnik, Regel- und Computersysteme der Universität Siegen.

sches Optimierungsverfahren effektiver, weil hier die Methode der Selbstoptimierung angewandt werden kann.

Der Rechner berechnet sich selbst vor dem Start der digitalen Regelung mit der Eingabe der Systemkonstanten K_S , K_1 , K_2 , K_3 , T_1 , T_2 und T_3 seine Optimalkonstanten K_P , T_n und T_v für den PID-Regel-Algorithmus. Diese Optimalkonstanten sind invariant und können wie bei dem empirischen Verfahren nach *Ziegler-Nichols* direkt auf den PID-Regel-Algorithmus übertragen werden.

Die Betragsoptimierung arbeitet im Frequenzbereich. Die Bestimmungsgleichungen gehen davon aus, dass der Betrag des Amplitudenverlaufs des Frequenzgangs F_w des geschlossenen optimalen Regelkreises bis zu möglichst hohen Werten lange nivelliert sein soll. Das Verfahren liefert nach ausführlichen Laborversuchen stabile optimale Reglerkonstanten K_P , T_n und T_v bei Schwankungen der Systemkonstanten K_i und T_i bis zu 20 % mit einer hohen Stabilitätsreserve.

Die Grundprinzipien sind im Einzelnen:

1. Nivellierung des Frequenzgangs F_w

$$\left| F_{w, \text{opt}} \right| = \frac{x}{w} = 1 \quad \text{oder} \quad 20 \cdot \log \frac{x}{w} = 0 \text{ dB}$$

$$\rightarrow x = w \rightarrow x_{di} = w - x = 0 \rightarrow \Delta f = 0 \quad (1)$$

2. Der Computer fragt ab, ob alle Zeitkonstanten vorhanden sind und sortiert sie nach der Größe:

$$T_3 > 0, T_2 > 0, T_1 > 0$$

$$\rightarrow T_3 > T_2 > T_1$$

$$\rightarrow T_{\text{max}} = T_3, T_{\text{mit}} = T_2, T_{\text{min}} = T_1$$

3. Die Kompensation der Zeitkonstanten des Systems reduziert die Phasenverschiebung und stabilisiert damit die Regelung:

a) Die größte Zeitkonstante T_{max} wird immer mit dem Integralanteil kompensiert:

$$T_n = T_{\text{max}}$$

um mit einem zu großen D-Anteil das Rauschen nicht zu verstärken.

b) Die mittlere Zeitkonstante T_{mit} wird durch den D-Anteil kompensiert:

$$T_v = T_{\text{mit}}$$

c) Die kleinste Zeitkonstante T_{min} bleibt erhalten, um das System schnell zu machen.

Sind alle drei Zeitkonstanten vorhanden, liegt ein System 3. Ordnung vor, und der Computer berechnet die optimalen Regelkonstanten für den PID-Regel-Algorithmus:

$$y_i = K_{Pm} x_{di} + \frac{T_{ab}}{T_i} \sum_{j=0}^n x_{di} + \frac{T_D}{T_{ab}} (x_{di} - x_{d[i-1]}) \quad (2)$$

Die optimale Verstärkung ist

$$K_P = \frac{T_{\text{max}}}{2K_S \cdot T_{\text{min}}} \quad (3)$$

Darin ist der Verstärkungsfaktor K_P die Verstärkung des Einkanal-Kompaktreglers, der auf den Mehrkanal-Regler für den PID-Regel-Algorithmus umgerechnet werden muss [4]:

$$K_{Pm} = \left(1 + \frac{T_v}{T_n} \right) \cdot K_P \quad (4)$$

Mit einer parallelen Struktur kann nur empirisch wie nach *Ziegler-Nichols* optimiert werden, aber nicht mathematisch vorausberechnend [4].

2.2 Optimales Übergangsverhalten

Nach der Kompensation erhält man die komplexe Übertragungsfunktion (Frequenzgang) mit $s = j\omega = j 2\pi f$ des offenen, kompensierten, optimalen Regelkreises:

$$F_{\text{ok,opt}} = F_R F_S = \frac{1}{s T_{\text{min}} (1 + s T_{\text{min}})} \quad (5)$$

F_R = Frequenzgang des virtuellen Reglers

F_S = Frequenzgang des Systems

Die Differentialgleichung des geschlossenen, optimalen Regelkreises lautet:

$$2T_{\text{min}} \frac{d^2}{dt^2} x + T_{\text{min}} \frac{d}{dt} x = w \quad (6)$$

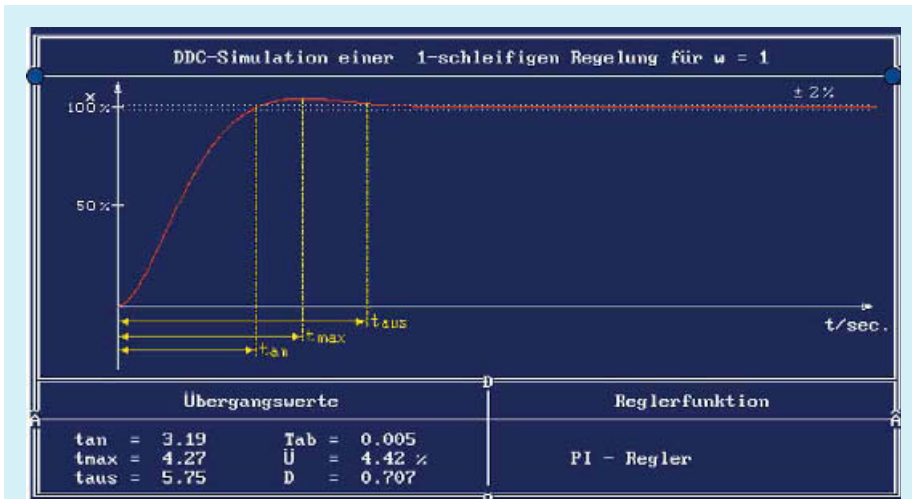
Die Lösungsfunktion dieser Differentialgleichung ist die optimale Übergangsfunktion des betragsoptimalen Regelkreises der digitalen Regelung $x = f(t)$ bei einem Eingangssprung der Führungsgröße w (Bild 2). Die Lösung dieser Differentialgleichung liefert folgende vorausberechenbare, optimale Übergangswerte:

1. Die Anregelzeit ist der Zeitpunkt, an dem die Regelgröße x erstmalig die Führungsgröße w erreicht: $t_{\text{an}} = 4,7 T_{\text{min}}$

2. Die Ausregelzeit ist der Zeitpunkt, nach dem die Regelgröße x für immer auf der Führungsgröße w bleibt, d. h. der Regelungsfehler $\Delta f = 0$ ist. Die exakte mathematische Definition besagt, dass ein Toleranzband von $\pm 2 \%$ nicht mehr verlassen wird (Bild 2): $t_{\text{aus}} = 10 T_{\text{min}}$

Die optimale Dämpfung ist $D = 1/\sqrt{2}$ bei einem maximalen Überschwingen von 4,3 %. Das System 3. Ordnung und der PID-Regel-Algorithmus enthalten alle anderen Systeme niedrigerer Ordnung. Der Rechner kann bereits bei der Eingabe der Systemkonstanten K_i und T_i nach der Ordnung des Systems eine Fallunterscheidung durchführen und entscheiden, welcher Algorithmus – PID, PI, PD oder I – für das System erforderlich wird. Für ein Integralsystem $T_{i,s}$ mit einem System 1. Ordnung reicht zur Optimierung der reine P-Algorithmus und für ein Integralsystem mit zwei Systemen 1. Ordnung wird zur Optimierung ein PD-Regel-Algorithmus benötigt. Damit enthält die Fallunterscheidung fünf zu optimierende Systeme.

Es wird zunächst vom Signalflussdiagramm und Ablaufdiagramm in Bild 1 mit den Zahlenwerten für den Drehstromantrieb ausgegangen. Wenn es geht, sollte man möglichst



② Simulation der Sprungantwort einer digitalen Regelung. Das Programm läuft in einer virtuellen DOS-Maschine (VDM) unter Windows XP.

ohne D-Anteil in einer Regelung auskommen. Dies gilt besonders für die innere Schleife einer Kaskadenregelung, weil das Differenzieren das Rauschen verstärkt, oder mathematisch ausgedrückt: Differenzieren bewirkt das Aufrauen einer Funktion, Integrieren das Glätten einer Funktion.

Wenn man die Zahlenwerte des Drehstromantriebs betrachtet, dann sind die elektronischen Zeitkonstanten T_1 und T_2 nach der Worst-Case-Methode zu groß angesetzt. Soll die elektronische Zeitkonstante mit berücksichtigt werden, dann lässt sich diese zu einer Verzugszeitkonstanten T_u zusammenfassen:

$$T_u = \sum_{i=1}^{n-1} T_i = T_1 + T_2 = 0,18 \text{ s} \quad (7)$$

Ein System ist dann gut regelbar, wenn folgendes Verhältnis von der Verzugszeitkonstanten T_u zur Hauptzeitkonstanten $T_{\max}$ eingehalten wird:

$$S = \frac{T_u}{T_{\max}} \leq 0,25 \quad (8)$$

(mit dem Zahlenwert $S = 0,225$ erfüllt). Das Prinzip der Summen der kleinen Zeitkonstanten ist für Systeme bis n -ter Ordnung anwendbar, wenn es eine Hauptzeitkonstante $T_{\max}$ gibt, mit der die obige Bedingung für die Regelbarkeit erfüllt ist.

Ein weiteres gutes Beispiel ist der Ruderwinkel-Regelkreis mit der Regelgröße $x = \beta$ einer Düsenverkehrsmaschine mit der mechani-

schen Hauptzeitkonstanten des Seitenruders $T_{\max, \beta}$, der mechanischen Zeitkonstanten des Hydraulikantriebs T_H , die man als mechanische Zeitkonstante nicht einfach verschwinden lassen kann, und die elektronische Ansteuerung der Hydraulik T_e vom Autopiloten oder Steuerknüppel. Damit lauten die Systemkonstanten:

$$\begin{aligned} K_S &= K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 = 1 \\ T_{\max} &= T_3 = 0,8 \text{ s} > T_{\min} = T_u = 0,18 \text{ s} \\ T_{\text{mit}} &= T_2^* = 0, \text{ weil } T_2 \text{ in } T_u \text{ aufgegangen ist.} \\ \text{Für den Fall, dass} \\ T_{\text{mit}} &= 0 \rightarrow T_v = T_{\text{mit}} = 0 \rightarrow T_D = 0 \end{aligned}$$

ergibt sich nach dem Ablaufdiagramm ein PI-Regel-Algorithmus

$$y_i = K_{\text{pm}} x_{di} + \frac{T_{\text{ab}}}{T_i} \sum_{j=0}^n x_{dj} \quad (9)$$

mit den optimalen Regelungskonstanten:

$$\begin{aligned} T_n &= T_{\max} = T_3 = 0,8 \text{ s} \\ K_{\text{pm}} &= \frac{T_{\max}}{2K_S \cdot T_{\min}} = K_p = 2,22 \\ \rightarrow T_i &= 0,36 \text{ s} \\ T_{\min} &= 0,18 \text{ s} \\ T_{\text{ab}} &= 0,025 \text{ s} \end{aligned} \quad (10)$$

Die Computer-Simulation in Bild ② bestätigt dieses Ergebnis. Der niedrige Verstärkungsfaktor, der fast immer unter 30 liegt, ist das Geheimnis der hohen Stabilitätsreserve von über 20 %. Zum Teil wurden auch Werte für

$K_p < 1$ mit dem gleichen optimalen Verlauf wie in Bild ② berechnet.

Vor dem Realisieren der digitalen Antriebsregelung mit dem Drehstrommotor wurden die Systemkonstanten K_S und T exakt zahlenmäßig analysiert. Die Differentialgleichung des Drehstromantriebs (vgl. ep 4/2002, S. 286-289) wird mit der Operatorrechnung in die komplexe Übertragungsfunktion und den Frequenzgang überführt:

$$\begin{aligned} T_m \frac{d}{dt} x_a + x_a &= K_S x_e \\ \rightarrow \frac{d}{dt} x_a &= s x_a \end{aligned} \quad (11)$$

$$\rightarrow F_s(s) = \frac{x_a}{x_e} = \frac{x}{y} = \frac{K_S}{1 + s T_{\min}}$$

Damit wird die Betragsoptimierung für den Drehstrommotor-Antrieb später im Vergleich zu den gemessenen Werten berechnet. Darin ist die analoge Eingangsgröße des gesamten Antriebs $x_e = y$. Die Ausgangsgröße $x_a = U_1$ ist die analoge Regelgröße x .

Der Drehstromantrieb mit elektronischem Spannungs-Frequenzumsetzer und Wechselrichter erreicht bei $x_e = y = 5 \text{ V}$ seine maximale Drehzahl $n_{\max} = 2000 \text{ U/min}$ bei einer Leistung von $W_{\max} = 1,3 \text{ kW}$. Dabei gibt der Tachodynamo genau $U_1 = 5 \text{ V}$ ab.

Daraus errechnet sich der Übertragungsfaktor des Systems in Übereinstimmung mit dem Signalfussdiagramm:

$$K_S = K_1 K_2 K_3 = \frac{U_{T, \max}}{y_{\max}} = 1 \quad (12)$$

Die Zeitkonstante des Gesamtsystems T_m ist das Zeitintervall, bei dem in der Hochlaufkurve 67,3 % erreicht werden. Das ist die Drehzahl $n_{\max} = 0,67 \cdot 2000 \text{ U/min} = 1346 \text{ U/min}$. Es konnte nur eine Zeitkonstante des Drehstromantriebs ermittelt werden, wie dies die Fachleute für die Antriebsregelung schon vorausgesagt haben:

$$T_m = 0,8 \text{ s} \quad (13)$$

Dieser Wert wurde durch eine genaue Frequenzgang-Messung F_s bestätigt. Das Ergebnis ist, dass eine mechanische Zeitkonstante die gesamte Systemdynamik bestimmt.

$$F_s|_{s=j\omega=j2\pi f} = \frac{x(s)}{y(s)} \quad (14)$$

Es liegt ein System 1. Ordnung vor. Dafür wird nach der Betragsoptimierung ein reiner I-Regel-Algorithmus angesetzt:

$$y_i = \frac{T_{ab}}{T_i} \sum_{d=0}^n x_{di} \quad (15)$$

Ferner gibt es bei **einer** System-Zeitkonstanten keinen Unterschied in der Größe:

$$T_m = T_{\max} = T_{\min} = 0,8 \text{ s} \quad (16)$$

Damit errechnet sich die Ausregelzeit zu:

$$t_{an} \approx t_{aus} = 10 T_{\min} = 8 \text{ s} \quad (17)$$

Die gemessene Anlaufkurve ist vermutlich unter der Oberwelligkeit des Wechselrichters etwas abgeflacht, damit stärker gedämpft ($D \approx 1$) und daher überschwingfrei mit $\ddot{U} \approx 0$. Für Kaskaden- und Positionsregelungen ist dies sogar ein Vorteil.

Im ersten Versuch wurde die Ausregelzeit gemessen mit $t_{aus} = 8,4 \text{ s}$. Damit ist die Ausregelzeit gegen den Idealwert um $\Delta t = 0,4 \text{ s}$ verlängert, bei absoluter Stabilität der Antriebsregelung mit Drehstrommotor.

Das Überspringen tritt bei allen Anlaufkurven nur bei einem Eingangssprung beim Einschalten auf, bei Anfahren im Normalbetrieb hingegen nie. Somit ist die Ausregelzeit t_{aus} die Hauptgröße für das Übergangsverhalten einer Antriebsregelung.

2.3 Virtuelle DOS-Maschinen für Multitasking in Echtzeit

Die digitale Regelung der Drehstrommotor-Antriebsregelung wie auch die Computer-Simulation in Bild 2 laufen in einer virtuellen DOS-Maschine und zwar schon unter Windows 3.11, 95/98 und auch noch unter XP mit der VDM-XP. Die Programme sind mit 85 kB für die Regelung und 35 kB für die Simulation sehr kompakt und entsprechend effektiv. Der mathematische Kern beider Programme für den PID-Algorithmus ist identisch. Daher sind die Aussagen über die Stabilität einer digitalen Regelung mit der Computer-Simulation sehr zuverlässig.

Windows XP hat den Kernel von NT 4.0 geerbt und damit auch den Kommando-Interpreter CMD, der in allen Betriebssystem bis Windows 98SE „Command.com“ war. Auch in XP gibt es multitaskingfähige, schnelle virtuelle DOS-Maschinen (VDM-XP), die im Arbeitsspeicher im geschützten Bereich einen kompletten 486er-Rechner mit 32-bit-Local-Bus im eigenen geschützten Bereich abbilden.

Die volle Effektivität zeigen die virtuellen DOS-Maschinen bei der Realisierung digitaler Regelungen im Multitasking-Betrieb, wobei eine oder auch zwei Visualisierung-VDMs zusätzlich eingerichtet sein können.

numerischen Mathematik abgeleitet, ohne dass dazu die höhere Mathematik mit der Integral- und Differentialrechnung benötigt wird.

Diese digitalen Regelungen erben die Grundeigenschaften der Stetigkeit und stetigen Differenzierbarkeit des zu regelnden Systems [2]. Dadurch lassen sich die linearen Optimierungs-Verfahren von der linearen, analogen Regelung auf die digitale Regelung übertragen. Dabei bleiben die optimalen Reglerkonstanten K_p , T_n und T_v invariant.

Die Abtastzeit T_{ab} geht nicht direkt in die Reglerkonstanten ein, sondern nur in die Genauigkeit der numerischen Integration und Differentiation.

Das Besondere in der Darstellung von Bild 1 liegt darin, dass es die Betragsoptimierung mit dem Ablaufdiagramm des PID-Regel-Algorithmus und mit dem Signalflussdiagramm der digitalen Antriebsregelung mit den A/D-D/A-Wandlern verbindet und dadurch einen geschlossenen digitalen Regelkreis darstellt. Dadurch ist nun auch klar zu erkennen, wo und wie die einzelnen analogen und digitalen Systemgrößen auftreten und eingreifen.

Alle vorangegangenen Untersuchungen wurden durch Versuche und Computer-Simulation unter den erschwerten Bedingungen Genauigkeit des Multitaskings im Echtzeitbetrieb im Labor bestätigt.

Der Multitaskingbetrieb in Echtzeit mit der exakt durchgerechneten Optimierung für zwei Antriebsregelungen in zwei virtuellen DOS-Maschinen ist das Kernstück eines Folgebeitrages zur digitalen Regelung. Die digitale Regelung wird durch den Multitaskingbetrieb mit Kaskaden-, Mehrgrößen- und adaptiven Regelungen erst richtig effektiv.

Literatur

- [1] Dittmar, E.: Mathematische Grundlagen und Optimierung digitaler Regelungen. Elektropraktiker, Berlin 58(2004) 7, S. 574-577.
- [2] Dittmar, E.: Stetigkeit und stetige Differenzierbarkeit der Systeme. Elektropraktiker, Berlin 57(2003) 1, S. 34-38.
- [3] Dittmar, E.: Synthetische und hybride Systeme mit Aufbau einer digitalen Regelung. Elektropraktiker, Berlin 58(2004) 2, S. 134-136.
- [4] Dittmar, E.: Elektronisches Regelungsmodell mit Mehrkanal-Regler, Patentschrift Nr. 250 834.
- [5] Proise, J.: Tutorial: Windows Multitasking. PC Magazine 13(1994)H.9.
- [6] Dittmar, E.: Grundlagen und Optimierung von Regelsystemen. Bamberg: Druckerei K. Urlaub 1990. ■

3 Fazit

In [1] und in diesem Folgebeitrag wurde der digitale PID-Regel-Algorithmus, der das Kernstück jeder digitalen Regelung ist, mit der