

Praktische Grundlagen von Regelsystemen

Stetigkeit und stetige Differenzierbarkeit aller Systeme

Prof. E. Dittmar, Gummersbach

Dieser Beitrag schließt den Beweis für die Stetigkeit und gleichmäßige stetige Differenzierbarkeit aller Regelsysteme ab. Wesentliche Grundgedanken mit praktischen Anwendungen wurden bereits in [1] angeführt. Im Zentrum stand die Dynamik der Regelgetriebe und der entscheidende Einfluss des Messortes auf die Regelungen.

1 Einführung

Der vorhergehende Beitrag schloss mit dem Fazit: Die Energie lässt keine Sprünge zu. Dieser Beweis ist deshalb so wichtig, weil auf diesem Ergebnis wichtige Verfahren aufbauen, wie

- die Laplace-Transformation mit der Algebraisierung der Differentialgleichungen
- die komplexe Übertragungsfunktion mit dem Frequenzgang
- das Frequenzkennlinien-Verfahren mit der Stabilität nach Bode
- viele Optimierungs-Verfahren wie die lineare und betragsoptimale Optimierung.

Für die Darstellung und insgesamt für die Regelsysteme ist ein gewisses Maß an angewandter Mathematik nötig, aber der Art, dass dies in der Praxis noch gut verständlich ist. Auf die unnötig übertriebene Mathematisierung wurde bereits im letzten Beitrag hingewiesen.

Dieser Beweis wird an dem bereits bekannten Elektroantrieb (Bild 1a) geführt. Ferner wird mit der Getriebeübersetzung $\ddot{u} = 1$ gerechnet, da die Fälle $\ddot{u} < 1$ und $\ddot{u} > 1$ bereits in der Fallunterscheidung [1] untersucht wurden.

2 Bedeutung der Stetigkeit und der Linearität

Wenn das System des Elektroantriebs stetig, stetig differenzierbar und damit linear, oder wegen der Stetigkeit im Arbeitspunkt A linearisierbar ist, kann die Laplace-Transformation angewandt werden zur Berechnung der komplexen Übertra-

gungsfunktion $F = f(s)$ mit dem Frequenzgang:

$$F(s) \Big|_{s=(\sigma+j\omega)} = F(j\omega) \text{ mit } \omega = 2\pi f \quad (1)$$

und der Zeitkonstanten des Systems

$$T = \frac{1}{\omega_E} = \frac{1}{2\pi f_E}$$

Die Gleichung 1 soll hier kurz interpretiert werden, sie wird später bei der Untersuchung der komplexen Übertragungsfunktion zusammen mit dem Frequenzgang genauer erörtert.

Der Realanteil des Laplace-Transformations-Operators ist $\sigma = 0$ bei den ungedämpften Schwingungen, die am meisten in technischen Anwendungen vorkommen. Die Differentialgleichung des Motorsystems ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung und beschreibt das Drehzahlverhalten $n = f(t)$ im Zeitbereich, auch Oberbereich genannt. Die Laplace-Transformation transformiert die Differentialgleichungen in den Frequenzbereich, auch Unterbereich genannt. Der Vorteil liegt darin, dass die Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen übergehen, wobei sich der Systeminhalt nicht ändert.

Mit algebraischen Gleichungen ist viel leichter zu rechnen als mit Differentialgleichungen. Dies macht sich besonders bei komplexen Systemen bemerkbar. Ohne die Algebraisierung wäre die Systemreduktion gar nicht anwendbar und damit auch keine lineare oder betragsoptimale Optimierung. Es kann die Signalflussdiagramm-Algebra mit dem Signalflussdiagramm selbst angewandt werden. Das Signalflussdiagramm ist ein besonderes Kennzeichen der gesamten Regelungstechnik und gibt die gezeichnete mathematische Struktur der Regelungen wieder.

Die Fourier-Transformation ist im Ansatz der Gleichung 1 schon mit enthalten. Die Z-Transformation wird für die praktischen Grundlagen der digitalen Regelsysteme nicht gebraucht. Die digitalen Regelalgorithmen verhalten sich aufgrund der kleinen Abtastzeit T_{ab} , die gegenüber der

Hauptzeitkonstante T_s sehr viel kleiner ist, quasi analog.

Es gilt nach Gleichung 19 [1] zusammen mit der kleinsten Zeitkonstanten $T_{\min}$ des Systems:

$$T_{ab} = 0,1 T_{\min}$$

Am Verlauf der Regelgröße $x = f(t)$ ist nicht zu erkennen, ob in einem Regelkreis ein digitaler oder analoger Regler arbeitet.

3 Stetigkeit und Linearität technischer Systeme

Die Untersuchungen [1] über das Massenträgheitsmoment Θ sind beim nachfolgenden Beweis für die Stetigkeit und die stetige Differenzierbarkeit deshalb so wichtig, weil es der Träger der System-Energie ist. Zu zeigen ist: Alle technischen Systeme, die einen Energieinhalt und damit eine System-Zeitkonstante T haben sind analog, stetig, stetig differenzierbar und linear oder linearisierbar im Arbeitspunkt. Die Energie lässt in der Natur keine Sprünge zu.

3.1 Beweis der Stetigkeit

Als anschauliches Beispiel wird auf den Motorantrieb zurückgegriffen, der mit allen Kurven für den Beweis der Stetigkeit und gleichmäßigen stetigen Differenzierbarkeit in Bild 1 dargestellt ist.

Die Differentialgleichung lautet:

$$T \frac{d}{dt} x_a + x_a = K_s x_e \quad (2)$$

Die Eingangsgröße als Eingangssprung der Spannung $x_{e0} = U_{m,0}$ ist an der Stelle $t = 0$ unstetig (Bild 1b):

$$x_e(t) = x_{e0} \begin{cases} t \geq 0 & x = x_{e0} \\ t \leq 0 & x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Der Drehzahlverlauf $x_a = n$ als Übertragungsfunktion lautet:

$$x_a = K x_{e0} (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (4)$$

Dieser Verlauf beginnt an der Stelle $t = 0$ mit einer endlichen Steigung, steigt gleichmäßig stetig an und ist in jedem Punkt für $t \geq 0$ stetig differenzierbar.

Dabei muss die Massenträgheit Θ durch die elektrische Energie beschleunigt werden:

$$E_e = U_{m,0} \int_0^{5T} i_m dt \quad (5)$$

Diese Umwandlung von elektrischer in mechanische Energie

$$E_k = \frac{1}{2} \Theta \omega_{\max}^2 \text{ oder } E_k = \frac{\pi^2}{1800} \Theta n_{\max}^2 \quad (6)$$

(mit n in [U/min]) ändert sich nicht sprunghaft, und damit kann sich die Drehzahl n auch nur gleichmäßig stetig ändern. Daraus

Autor

Prof. Edgar Dittmar ist beamteter Hochschulprofessor für elektronische Steuerungstechnik, Regel- und Computersysteme der Universität Siegen.

folgt: Die Energie eines Systems kann sich nie sprunghaft ändern.

Noch deutlicher wird dieses Naturgesetz an der Auslaufkurve des Motorantriebs (Bild 1b). Zum Zeitpunkt $t = t_{\text{aus}}$ ist die Drehzahl:

$$n|_{t=t_{\text{aus}}} = n_{\text{max}} \rightarrow n = 0 \quad (7)$$

Aufgrund der in dem Massenträgheitsmoment Θ gespeicherten Energie fällt die Drehzahl vom Maximalwert nicht sprunghaft, sondern stetig auf Null ab. Wäre das System nicht stetig, würde die Drehzahl n an der Stelle t_{aus} sofort auf Null abfallen. Aber für die Werte $t \geq t_{\text{aus}}$ beginnt die Auslaufkurve des Motorantriebs nach Gleichung 7.

An der Stelle $t = t_{\text{aus}}$ haben der Verlauf des Drehzahlanstiegs und der Auslaufkurve den gleichen Wert $n_{\text{max}} = 1691 \text{ [U/min]}$. Daraus folgt, dass der Drehzahlverlauf an der Stelle $t = t_{\text{aus}}$ stetig und damit der gesamte Verlauf der Drehzahlkurve nach Bild 1b stetig ist, aber theoretisch nicht stetig differenzierbar, da es an der Stelle $t = t_{\text{aus}}$ zwei Steigungen gibt und damit zwei Differentialquotienten. Der schwarze Kurvenverlauf zeigt an der Stelle $t = t_{\text{aus}}$ einen Knick. Das ist der ungünstigste denkbare Fall.

Versuche haben aber gezeigt, dass der Drehzahlverlauf nach Bild 1b aufgrund der glättenden Wirkung der Massenträgheit Θ keinen Knick aufweist, wie in der theoretischen Kurve, sondern abgerundet ist (rote Linie im Bild). Damit wird der Drehzahlverlauf $n = f(t)$ über den gesamten Verlauf auch gleichmäßig stetig differenzierbar, und es ist bewiesen, dass das System im ganzen Wertebereich analog und stetig, gleichmäßig stetig differenzierbar und linear ist.

3.2 Linearität und Linearisierbarkeit der statischen Kennlinie

Zu dieser dynamischen Untersuchung, die den zeitlichen Verlauf $x_a = f(t)$ beschreibt, muss nun noch die Linearität der statischen Kennlinie untersucht werden:

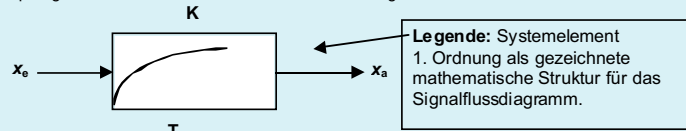
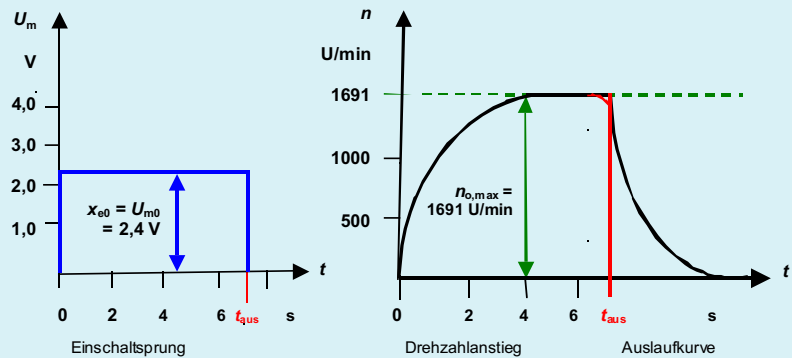
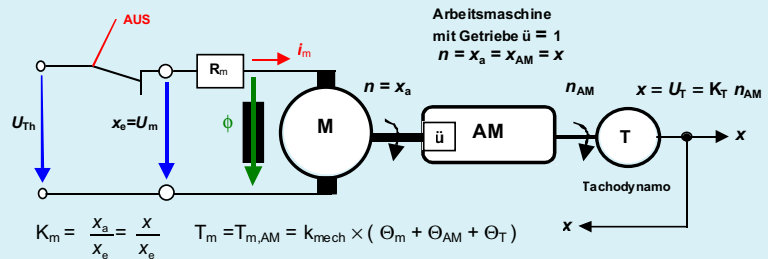
$$x_a = f(x_e) \quad (8)$$

Die Differentialgleichung des Systems muss sowohl das dynamische als auch das statische Verhalten richtig beschreiben. Das statische Verhalten ist dadurch gekennzeichnet, dass sich das System im Ausgleichszustand befindet. Der Ausgleichszustand ist dann erreicht, wenn die zeitliche Änderung nach Null geht. Dies ist theoretisch für $t \rightarrow \infty$ erreicht:

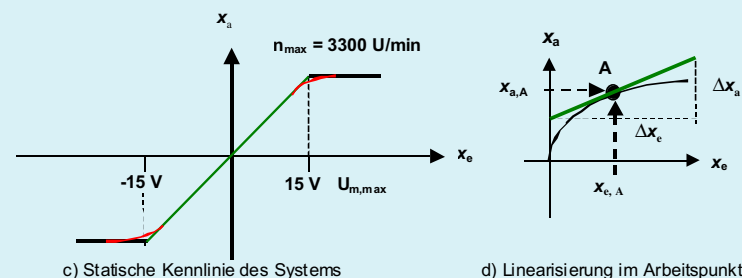
$$\lim_{t \rightarrow \infty} (T \frac{d}{dt} x_a + x_a = K_s x_e) \quad (9)$$

$$\rightarrow x_a = K_s x_e \text{ (statische Kennlinie)}$$

a) Motorantrieb mit Tachodynamo an der Arbeitsmaschine



b) Drehzahlverlauf $n = f(t)$ mit Auslaufkurve und Systemelement



c) Statische Kennlinie des Systems

d) Linearisierung im Arbeitspunkt

1 Stetigkeit und Linearisierbarkeit technischer Systeme

In der technischen Praxis ist die Unendlichkeit mit der Ausgleichszeit t_0 (Bild 1b: Drehzahlanstieg) erreicht bei:

$$t_0 = t_{\infty} = 5T = 5T_m = 5 \cdot 0,8 \text{ s} = 4 \text{ s} \quad (10)$$

Mit $t = t_0$ in Gleichung 4 ergibt sich eine sehr gute Näherung:

$$x_a = K x_{e0} (1 - \frac{1}{e^5}) = K x_{e0} (1 - 0,0067)$$

$$\rightarrow \Delta f = 6,7 \text{ ‰} \text{ Näherungsfehler} \quad (11)$$

Für den Motorantrieb lautet die statische Kennlinie der Motordrehzahl:

$$n_0 = K_m \cdot U_{m,0} \quad (12)$$

Der Index 0 zeigt an, dass der Ausgleichszustand erreicht ist. Die Enddrehzahl n_0 steigt proportional mit der jeweiligen anliegenden Motorspannung $U_{m,0}$ an.

Weil die statische Kennlinie aus der Differentialgleichung abgeleitet ist, deren Lösung über den ganzen Wertebereich stetig und stetig differenzierbar ist, muss auch in allen Fällen die statische Kennlinie stetig und stetig differenzierbar sein. Die Ausgangsgröße x_a folgt immer analog der Eingangsgröße x_e .

Ist der Übertragungsfaktor $K = \text{konstant}$, ist die statische Kennlinie (Bild 1c) und damit das System selbst im geltenden Wertebereich linear. Damit erfüllt das System alle Anforderungen: stetig, stetig differenzierbar, analog und linear.

Die ersten drei Anforderungen von stetig bis analog erfüllen alle technischen Systeme und sind damit mindestens im Arbeitspunkt A linearisierbar (Bild 1d). Dann kann, wie eingangs bereits dargestellt, die Laplace-Transformation angewandt werden.

Der geltende Wertebereich der Linearität eines Systems ist durch die obere und untere Begrenzung gegeben, wie dies aus der

statischen Kennlinie in Bild 1c zu erkennen ist. Im Wertebereich der statischen Kennlinie, die grün gekennzeichnet ist, arbeitet das System linear.

Die Steigung in diesem Bereich ist konstant und gibt den Übertragungsfaktor K_s dieses Systems wieder. Dies soll mit den Werten im Bild 1c des kleinen Servomotors veranschaulicht werden. Der lineare Wertebereich wird begrenzt durch die Motorspannung $U_{m,max}$ als Folge der begrenzten Stellenergie des Systems. Oberhalb dieser Grenze bleibt dann die Drehzahl $n_{max} = 3300$ [U/min] konstant (Bild 1c: schwarz gekennzeichnete Bereich).

Die statische Kennlinie ist im ganzen Wertebereich stetig, aber an den Grenzen $U_{m,max} = 15$ V nicht mehr stetig differenzierbar, weil an der oberen Grenze der Differentialquotient wechselt von

$$\frac{dx_a}{dx_e} = \begin{cases} K \text{ für } x_e = \pm x_{e,max} \\ 0 \text{ für } x_e \leq -x_{e,max} \text{ und } x_e \geq x_{e,max} \end{cases} \quad (13)$$

$$K = \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e} = \text{konst.} \quad (14)$$

als Übertragungsfaktor des Systems.

In der Praxis ist dieser Übergang, der im Verlauf der statischen Kennlinie im Bild 1c als Knick dargestellt ist, abgerundet (roter Verlauf im Bild 1b).

Ähnliche abrundende Glättungen treten in der technischen Praxis auch für die Totzeit T_t und sogar beim Verlauf der Regelgröße $x = \delta$ der Zweipunkt-Temperatur-Regelung auf. So wird die Totzeit T_t in der Phasenanschnitts-Steuerung in einem Wechselrichter durch Induktivitäten und die Massenträgheit Θ des Motors geglättet. Die Totzeit T_t wird zur Verzugszeit T_u . Damit ist das System wieder linear. Oft wird die Transportzeit oder Laufzeit T_T fälschlich als Totzeit bezeichnet. In der Praxis gibt es fast keine Totzeit oder einen Knick im Verlauf der Ausgangsgröße x_a , weil die Energiespeicher des Systems den Verlauf x_a glätten.

Die Forderung der Linearität der statischen Kennlinie ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Linearität eines Systems.

Alle Systeme, die sich aus stetigen, stetig differenzierbaren sowie linearisierbaren oder linearen Teilsystemen zusammensetzen, erben die Eigenschaften der Teilsysteme.

Auch die Proportional- und Integralsysteme sind stetige, stetig differenzierbare und lineare Systeme, die vom System 1. Ordnung direkt ableitbar sind. Dies wird später noch bewiesen.

Doch nicht alle Systeme haben eine absolute lineare statische Kennlinie. Der Übertragungsfaktor K ist über den ganzen Bereich nicht mehr konstant (Bild 1c):

$$K \Big|_{x_e = A(x_{e,A}; x_{a,A})} = f(x_e) \quad (15)$$

So gehören dieser Gruppe viele Wärmekraftmaschinen sowie Kraftwerksturbinen an. Die statischen Kennlinien von Kraftwerksturbinen zeigen einen Verlauf ähnlich dem im Bild 1d.

Da Kraftwerksturbinen für einen Turbogenerator immer konstant mit $x_a = n = 3000$ U/min für ein 50-Hz-Netz laufen müssen, ist der Arbeitspunkt an der Stelle A genau definiert. In der Turbinenkennlinie findet man dazu die Eingangsgröße $x_{e,A}$ und damit auch den Übertragungsfaktor der Turbine:

$$K \Big|_{x_e = A(x_{e,A}; x_{a,A})} = \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e} \quad (16)$$

Der Übertragungsfaktor des Systems K ist der Differentialquotient im Arbeitspunkt A.

Die obige Gleichung 16 gibt den Differenzenquotient wieder. Der Zusammenhang beider Quotienten ist

$$K \Big|_{x_e = A} = \lim_{\Delta x_e \rightarrow \infty} \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e} = \frac{dx_a}{dx_e} \Big|_{x_e = A} \quad (17)$$

Geometrisch ist der Übertragungsfaktor K die Steigung der Tangente an der statischen Kennlinie an der Stelle des Arbeitspunktes A.

Der Übertragungsfaktor K wird in der Praxis dadurch bestimmt, dass der Arbeitspunkt mit den Koordinaten $A(x_e = x_{e,A}; x_a = x_{a,A})$ an der Stelle $x_{e,A} = A$ in die statische Kennlinie eingetragen wird. Dann wird die Tangente an die statische Kennlinie im Arbeitspunkt A angelegt (Bild 1d), die Strecken Δx_e und Δx_a eingetragen und der Übertragungsfaktor K des Systems nach Gleichung 17 berechnet. Dieses Verfahren ist für die Praxis deshalb so wichtig, weil der Verlauf der statischen Kennlinie $K = f(x_e)$ oft nur als gemessene Kurve vorliegt. Damit muss dieses geometrische Verfahren angewandt werden.

Trotz unserer so digital-euphorischen Zeit sind alle Systeme stetig und analog. Es gibt in der Natur und der technischen Welt keine nichtstetigen Systeme. Alle technischen Systeme, die mindestens einen Energiespeicher, d. h. eine Zeitkonstante T haben, aber auch Maschinen wie Motoren und Turbinen, arbeiten

- analog
- stetig
- gleichmäßig stetig differenzierbar
- linear oder aber linearisierbar im Arbeitspunkt A.

Diese vier Grundeigenschaften gelten für alle Systeme, auch für reine Proportional- und Integralsysteme und zusammengesetzte Systeme bis n-ter Ordnung, weil sie vom System 1. Ordnung ableitbar sind und damit diese vier Grundeigenschaften erben. Das Hauptergebnis für alle Systeme ist,

dass linear zu regelnde Systeme mathematisch durch lineare und simultane Differentialgleichungen und über die Laplace-Transformation durch die komplexe Übertragungsfunktion und den Frequenzgang dargestellt werden können.

Ferner kann der Standard-PID-Regler eingesetzt werden. Alle namhaften Unternehmen stellen heute für die Antriebs- und Verfahrensregelungen fast nur noch den digitalen Regler mit dem linearen PID-Algorithmus als Industriestandardregler her.

Diese Erkenntnis erspart einen unnötigen Aufwand zu allen nichtlinearen Theorien, die nur in Sonderfällen zu brauchbaren Ergebnissen für die Praxis führen.

Mit der Gleichung 7 wird bewiesen, dass das System stetig und analog und zusätzlich stetig differenzierbar ist. Ferner zeigt Gleichung 17, dass alle Systeme mindestens linearisierbar im Arbeitspunkt A sind.

4 Fazit

Die Erfahrungen über den Messort [1] zeigen, dass der Messort nicht beliebig verlegt werden darf. Ferner führt die räumliche Trennung des Messortes vom Stellort zu extremen Schwierigkeiten, weil die Regelgröße $x = f(t, s)$ zusätzlich eine Funktion des Weges s wird. So kann eine virtuelle Unstetigkeit erzeugt werden.

Bei der Planung und dem Bau eines Systems oder einer ganzen Anlage muss daher a priori regelungsgerecht geplant werden, weil der Regler oder auch der PID-Regelalgorithmus diese Fehler im System nicht mehr ausgleichen kann.

Von Natur aus sind alle technischen Systeme analog, stetig, gleichmäßig stetig differenzierbar sowie linear oder linearisierbar im Arbeitspunkt A. Diese Grundeigenschaften wurden zunächst nur für ein System 1. Ordnung bewiesen, aber sie gelten für alle Systeme 1. Ordnung und für alle Systeme, die aus dem System 1. Ordnung abgeleitet werden können, beispielsweise die Proportional- und Integralsysteme, ferner Systeme n-ter Ordnung.

Die Erkenntnis, dass alle Systeme stetig und gleichmäßig stetig differenzierbar sind, erspart viel unnötige nichtlineare Theorien, die in der Praxis auch nicht angewandt werden. Hier kommt der lineare digitale Standardregler mit PID-Regelalgorithmus zum Einsatz.

Literatur

- [1] Dittmar, E.: Stetigkeit und Systemdynamik unter dem Einfluss des Regelgetriebes. Elektropraktiker, Berlin 56 (2002) 7. S. 568-572
- [2] Dittmar, E.: Grundlagen und Optimierung von Regelsystemen. Bamberg: Druckerei K. Urlaub