Erdungswiderstände geometrisch einfacher Erder

E. Hering, Dresden

Der Beitrag erläutert die Vorausberechnung der Ausbreitungswiderstände von linienförmigen Erdern sowie von solchen in Form von Halbkugeln und Kreisplatten. Als linienförmige Erder werden gestreckte Banderder und vertikale Staberder behandelt. Halbkugeln und Kreisplatten haben keine praktische Bedeutung als Erder. Die für sie geltenden Formeln können jedoch als Ausgangsbasis für Überschlagsrechnungen der Ausbreitungswiderstände ähnlich gestalteter Erder dienen, z. B. Stahlbewehrungen von Mast- und Turmfundamenten sowie der Fundamentwannen und Fundamentplatten von Häusern.

1 Ausbreitungswiderstand, Erdungswiderstand und Erdungsimpedanz

Für die Wirksamkeit einer Erdungsanlage ist vor allem deren Scheinwiderstand (Erdungsimpedanz) Z_E maßgebend, der sich gemäß Bild ❶ aus dem Wirkwiderstand in Form des Erdungswiderstands R_E und dem Blindwiderstand X_E zusammensetzt. Der Erdungswiderstand R_E seinerseits ist die Summe aus dem Ausbreitungswiderstand R_A, dem Wirkwiderstand R_{EE} des Erders selbst und dem Wirkwiderstand R_{EL} des Erdungsleiters (z. B. Anschlussfahne, Kabel). Unter „Ausbreitungswiderstand" versteht man den Teil des Erdungswiderstands, der vom Erdstoff gebildet wird, beim Fundamenterder zusätzlich vom Beton. Oftmals werden Ausbreitungswiderstand R_A, Erdungswiderstand R_E und Erdungsimpedanz Z_E nicht streng auseinander gehalten, weil sie sich in ihrem Betrag nur wenig voneinander unterscheiden.

Allerdings können die Unterschiede bei langen Erdern schon erheblich sein. Das trifft besonders bei der Verwendung von Edelstahl zu, denn der spezifische Widerstand des V4A (Werkstoff-Nr. 1.4571) beträgt mit $\rho = 0{,}75\ \Omega\text{mm}^2\text{m}^{-1}$ im Verhältnis zu dem von Stahl etwa das 5-fache und zu dem des Kupfers etwa das 42-fache!

2 Grundsätze der Berechnung

Die beschriebenen Berechnungsmethoden können unter der Voraussetzung angewendet werden, dass der spez. Erdwiderstand zumindest unterhalb der Frostgrenze in allen Tiefen gleich („homogener Erdstoff") und dem Berechner bekannt ist. Der Ausbreitungswiderstand R_A ist dem spezifischen Erdwiderstand ρ proportional und ferner von den geometrischen Eigenschaften des Erders (Erderform, Erderabmessungen, Leiterform, Leiterabmessungen, Lage zur Geländeoberfläche) abhängig. Der Einfluss der geometrischen Eigenschaften des Erders kann durch die geometrische Konstante g mit der Einheit m ausgedrückt werden [1][2]. Es ist zweckmäßig, zunächst diese Größe zu ermitteln, was noch näher beschrieben wird. Anschließend kann der Ausbreitungswiderstand R_A aus dem spezifischen Erdwiderstand ρ und der geometrischen Konstante g errechnet werden:

$$R_A = \frac{\rho}{g} \qquad (1)$$

Die Vorausberechnung des Ausbreitungswiderstands ist im Allgemeinen schon objektiv (d. h. ohne Einfluss des Ausführenden) mit Ungenauigkeiten behaftet, vor allem dadurch, dass der spezifische Erdwiderstand nicht genau ermittelt werden kann und Schwankungen unterliegt.

Das muss man bei den Erwartungen, die man an die Genauigkeit der Berechnungsergebnisse stellt, berücksichtigen. Aus dem gleichen Grund wäre es zwecklos, die Berechnung allzu genau durchzuführen. Andererseits sollte vermieden werden, dass bei der Berechnung erhebliche Ungenauigkeiten hinzukommen.

3 Erder im Vollraum

Zur Aufstellung der Berechnungsformeln wurde erst einmal von der Vorstellung ausgegangen, dass sich der Erder in einem aus Erdstoff bestehenden Raum befindet, der nach allen Richtungen eine unendlich große Ausdehnung hat und deswegen „Vollraum" genannt wird [3]. Die dafür geltenden geometrischen Konstanten g_v sind in der Tafel ❶ angegeben.

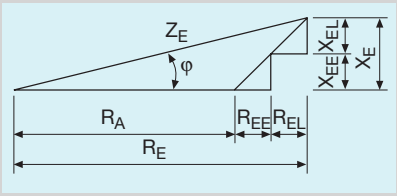
Erder im Vollraum sind jedoch irreal, weil die Ausdehnung des elektrisch leitenden Erdstoffes zumindest durch die Geländeoberfläche begrenzt ist. Zur Gewinnung der Berechnungsformeln für reale Erder hat man sich vorgestellt, dass der Vollraum durch einen ebenen Schnitt in zwei gleiche Halbräume geteilt wird. Die Schnittebene verläuft dabei durch die Mitte des Erders und durch den Erdstoff. Wegen der zwischen den beiden Halbräumen bestehenden Symmetrie wird die Schnittebene von keinem Strom durchflossen. Infolgedessen hat bei Wegfall eines Halbraums der verbleibende einen doppelt so großen Ausbreitungswiderstand R_A [3] oder – was das Gleiche bedeutet – eine halb so große geometrische Konstante g im Verhältnis zum Vollraum:

$$g = 0{,}5\ g_v \qquad (2)$$

Die Schnittebene ist außerhalb des Erders praktisch die Grenzfläche zwischen dem leitenden Erdstoff und dem nicht leitenden Medium (Luft oder gefrorener Erdstoff).

4 Reale Erder

Die realen Erder sind im Bild ❷ dargestellt. Halbkugeln und waagerechte Platten können als Ausgangsbasis für Überschlagsrechnungen der Ausbreitungswiderstände ähnlich gestalteter Erder dienen. Erder mit den Formen nach den Teilbildern ❷ a bis c werden praktisch nicht hergestellt. Die



❶ **Widerstandsdiagramm einer Erdungsanlage**
R_A Ausbreitungswiderstand; R_E Erdungswiderstand (Wirkwiderstand der Erdungsanlage); R_{EE} Wirkwiderstand des metallenen Leiters, der den Erder bildet; R_{EL} Wirkwiderstand des Erdungsleiters (z. B. Anschlussfahne, Kabel); X_E Erdungsreaktanz (Blindwiderstand der Erdungsanlage); X_{EE} Reaktanz des metallenen Leiters, der den Erder bildet; X_{EL} Reaktanz des Erdungsleiters; Z_E Erdungsimpedanz (Scheinwiderstand der Erdungsanlage); φ Impedanzwinkel

Tafel ❶ Geometrische Konstante g_v von Erdern im Vollraum

Erderform	g_v
Kugel	$2\,\pi\,D$
Kreisplatte	$4\,D$
schlanker Zylinder	$\frac{2\pi \cdot l}{\ln(2l/d)}$

D Durchmesser der Kugel oder Kreisplatte; d Durchmesser des Zylinders; l Länge des Zylinders; ln natürlicher Logarithmus (Basis e = 2,71828).

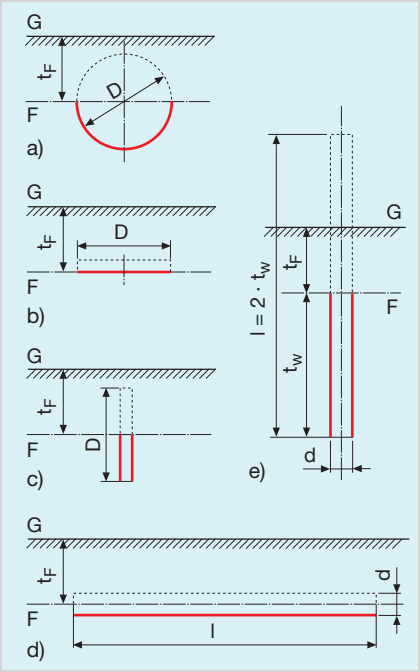
Autor

Dipl.-Ing. (FH) *Enno Hering* ist Mitglied des AK „Starkstromanlagen bis 1000 V" des VDE-Bezirksvereins Dresden.

Tafel ❷ Geometrische Konstante *g* von realen Erdern an der Grenzfläche des leitenden Erdstoffs

Erderform	Lage	Wirksamer Teil der Oberfläche	Bild	g (Gleichung)
Kugel/ Halbkugel	Kugelmittelpunkt in der Grenzfläche	gewölbter Teil der Oberfläche einer Halbkugel	❷ a)	πD (3)
Kreisplatte/ Halbkreisplatte	horizontal, Kreisfläche in der Grenzfläche	eine Seite der Kreisplatte	❷ b)	$2D$ (4)
	vertikal, Kreisachse in der Grenzfläche	beide Seiten einer Halbkreisplatte	❷ c)	
schlanker Zylinder/ Halb-Zylinder	Zylinderachse in der Grenzfläche (gestreckter Oberflächenerder)	Mantelfläche des in der Achse halbierten Zylinders	❷ d)	$\frac{\pi \cdot l}{\ln(2l/d)} = \frac{1{,}364 \cdot l}{\lg(2l/d)}$ (5)
	Zylinderachse senkrecht zur Grenzfläche, Mittelpunkt in der Grenzfläche (vertikaler Tiefenerder)	Mantelfläche des senkrecht zur Achse halbierten Zylinders $l = 2\,t_w$	❷ e)	$\frac{2\pi \cdot t_w}{\ln(4t_w/d)} = \frac{2{,}729 \cdot t_w}{\lg(4t_w/d)}$ (6)

t_w wirksame Länge des vertikalen Zylinders (Tiefenerders); lg briggsscher Logarithmus (dekadischer, Basis 10)



❷ Reale Erder
a) Halbkugel
b) flach angeordnete Kreisplatte
c) aufrecht angeordnete Halbkreisplatte
d) flach angeordneter Zylinder (Oberflächenerder, Banderder)
e) aufrecht angeordneter Zylinder (Tiefenerder, Staberder)
D Durchmesser der Kugel oder Kreisplatte; *d* Durchmesser des Zylinders; *l* Länge des Zylinders; t_w wirksame Tiefe des Zylinders; t_F Frosttiefe; *F* Ebene der Frostgrenze, gilt für die Berechnung als Grenzfläche des leitenden Erdstoffes; *G* Geländeoberfläche

Erläuterung: Mit Punktlinien ist jeweils der Teil des Erders in demjenigen Halbraum dargestellt, der beim realen Erder fehlt. Dort wo kein Frost auftreten kann, gelten die Berechnungen und Tafeln bei $t_F = 0$, d. h. die Geländeoberfläche ist dort Grenzfläche.

Ausbreitungswiderstände ringförmiger Erder wurden schon in [1] und [2] behandelt. Linienförmige Erder werden als schlanke Zylinder oder mit anderen Querschnitten

- parallel zur Geländeoberfläche als Oberflächenerder[1)] (Banderder), siehe Teilbild ❷ d, und
- rechtwinklig zur Geländeoberfläche als Tiefenerder[1)] (Staberder), siehe Teilbild ❷ e, ausgeführt.

Die geometrischen Konstanten können mit den in der Tafel ❷ enthaltenen Gleichungen (3) bis (6) berechnet werden. Der Unterschied zwischen der Gleichung (5) für den gestreckten Oberflächenerder und der Gleichung (6) für den vertikalen Tiefenerder ergibt sich daraus, dass bei letztgenanntem die wirksame Tiefe t_w eingesetzt wird, die nur die Hälfte von *l* beträgt.

Die Formeln für die Ausbreitungswiderstände der linienförmigen Erder enthalten von Haus aus den natürlichen Logarithmus ln. Für diejenigen, die den briggsschen Logarithmus lg [2)] bevorzugen, ist auch dieser in den Gleichungen (5) und (6) berücksich-

[1)] Die Ausdrücke „Oberflächenerder“ und „Tiefenerder“ werden mitunter der maximalen Tiefe ab Geländeoberfläche zugeordnet. Hier wird hinsichtlich der Richtung der Erderachse unterschieden.

[2)] Bei Taschenrechnern wird die Taste für $\lg = \log_{10}$ üblicherweise mit „log“ oder „LOG“ beschriftet, obwohl „log“ eigentlich das allgemeine Kurzzeichen für die Logarithmen aller Systeme ist.

Tafel 3 Geometrische Konstante *g* von Oberflächenerdern in Abhängigkeit von *l* und *d*

l in m	*d* in m		
	0,010	0,015	0,020
	g in m		
4	1,879	2,001	2,097
5	2,273	2,415	2,527
6	2,658	2,819	2,946
7	3,035	3,215	3,356
8	3,406	3,604	3,759
9	3,771	3,987	4,155
10	4,132	4,365	4,547
11	4,489	4,739	4,933
12	4,842	5,108	5,316
13	5,192	5,475	5,694
14	5,540	5,838	6,070
15	5,884	6,198	6,442
16	6,226	6,556	6,811
17	6,566	6,911	7,178
18	6,904	7,263	7,542
19	7,240	7,614	7,904
20	7,573	7,963	8,264
22	8,236	8,654	8,978
24	8,893	9,339	9,685
26	9,544	10,02	10,38
28	10,19	10,69	11,08
30	10,83	11,36	11,77
32	11,47	12,02	12,45
34	12,10	12,68	13,13
36	12,73	13,34	13,81
38	13,36	13,99	14,48
40	13,98	14,64	15,15
42	14,60	15,28	15,81
44	15,22	15,93	16,47
46	15,83	16,57	17,13
48	16,44	17,20	17,79
50	17,05	17,84	18,44

Die Tafel wurde mit Gl. (5) errechnet.

Tafel 4 Geometrische Konstante *g* von Tiefenerdern in Abhängigkeit von t_w und *d*

t_w in m	*d* in m		
	0,020	0,025	0,040
	g in m		
1	1,186	1,238	1,365
1,5	1,653	1,720	1,881
2	2,098	2,179	2,372
2,5	2,528	2,622	2,845
3	2,947	3,053	3,305
3,5	3,357	3,476	
4	3,760	3,890	
4,5	4,157	4,298	
5	4,548	4,700	
5,5	4,935	5,097	
6	5,318	5,490	
6,5	5,696	5,879	
7	6,072	6,265	
7,5	6,444	6,647	
8	6,814	7,026	
8,5	7,181	7,403	
9	7,545	7,776	
9,5	7,907	8,148	
10	8,267	8,517	
11	8,981	9,249	
12	9,688	9,974	
13	10,39	10,69	
14	11,08	11,40	
15	11,77	12,11	
16	12,46	12,81	
17	13,14	13,51	
18	13,81	14,20	
19	14,48	14,89	
20	15,15	15,57	
21	15,82	16,25	
22	16,48	16,93	
23	17,14	17,60	

Die Tafel wurde mit Gl. (6) errechnet.

tigt. Zwischen ln und lg besteht folgende Beziehung:

$$\lg a = \lg e \cdot \ln a = \lg 2{,}71828 \cdot \ln a = 0{,}434294 \ln a \qquad (7)$$

Die Berechnung nach den Gleichungen (5) und (6) kann man sich ersparen, wenn man die geometrische Konstante *g*

- für den Oberflächenerder der Tafel 3 und
- für den Tiefenerder der Tafel 4

entnimmt. Für einen einzugebenden Wert, der zwischen zwei Eingabewerten der betreffenden Tafel liegt, kann das Ergebnis durch Interpolieren gewonnen werden. Man kann aber stattdessen den kleineren der beiden benachbarten Eingabewerte der Tafel wählen. Mit dem daraus entstehenden Fehler liegt man auf der sicheren Seite. Gefrorener Erdstoff leitet nicht. Darum werden Oberflächenerder mindestens in der Tiefe der Frostgrenze verlegt. Das ist die Frosttiefe, die im Winter nur selten und kurzzeitig überschritten wird. Sie beträgt in Deutschland bei durchschnittlichen klimatischen Verhältnissen 0,7 m [4]. Im Gebirge muss ggf. mit größerer Frosttiefe gerechnet und der Erder entsprechend tiefer verlegt werden. Die Gleichung (5) und die Tafel 3 gelten bei Anordnung des Oberflächenerders in der Ebene der Frostgrenze. Tiefere Verlegung ergibt eine geometrische Konstante g, die etwas größer ist als die berechnete, was jedoch kein Nachteil ist.

Beim Tiefenerder gilt die wirksame Tiefe t_w erst ab Frostgrenze. Diese entfällt natürlich, wenn der Erder von einem frostfreien Raum (z. B. Keller) aus eingebracht wird. In die Berechnungen und Tafeln ist als *d* der Durchmesser von rundem Erdermaterial einzusetzen – wie auch alle anderen Längenmaße in m. Bei flachem Material kann für *d* als „wirksamer Durchmesser" das 0,5-fache der Breite zuzüglich dem 0,6-fachen der Dicke eingesetzt werden, also z. B. bei

- 30 mm x 3,5 mm:
  0,015 m+0,002 m = 0,017 m
- 40 mm x 4 mm:
  0,020 m + 0,002 m = 0,022 m.

Man liegt auf der sicheren Seite, wenn man die halbe Breite einsetzt [3][4], also z. B.

- 0,015 m bei 30 mm x 3,5 mm,
- 0,020 m bei 40 mm x 4 mm.

Die Auswirkung dieses kleinen Unterschieds ist gering, weil die Größe *d* logarithmisch in die Rechnung eingeht. Für Kreuzstaberder 50 mm x 50 mm gibt man $d = 0{,}04$ m ein.

Rechenbeispiel für gestreckten Oberflächenerder:

Leiterdurchmesser: $d = 0{,}010$ m
Länge: $l = 30$ m
Legetiefe: Entsprechend Frostgrenze
spezifischer Erdwiderstand: $\rho = 300\ \Omega$m
Nach Gleichung (5):

$$g = \frac{1{,}364 \cdot 30\ \text{m}}{\lg(2 \cdot 30\ \text{m}/0{,}01\ \text{m})} = 10{,}83\ \text{m}$$

Alternativ nach Tafel 3: $g = 10{,}83$ m
Nach Gleichung 1:

$$R_A = \frac{300\ \Omega\text{m}}{10{,}83\ \text{m}} = 27{,}70\ \Omega$$

Rechenbeispiel für vertikalen Tiefenerder:

Leiterdurchmesser: $d = 0{,}025$ m
Wirksame Tiefe: $t_w = 15$ m
spezifischer Erdwiderstand: $\rho = 300\ \Omega$m
Nach Gleichung (6):

$$g = \frac{2{,}729 \cdot 15\ \text{m}}{\lg(4 \cdot 15\ \text{m}/0{,}025\ \text{m})} = 12{,}11\ \text{m}$$

Alternativ nach Tafel 4:
$g = 12{,}11$ m
Nach Gleichung (1):

$$R_A = \frac{300\ \Omega\text{m}}{12{,}11\ \text{m}} = 24{,}77\ \Omega$$

Literatur

[1] *Hering, E.*: Fundamenterder. Berlin: Verlag Technik 1996.
[2] *Hering, E.*: Berechnung der Erdungswiderstände ringförmiger Erder. Elektropraktiker, Berlin 54(2000)12, S. 1062-1065.
[3] *Koch, W.*: Erdungen in Wechselstromanlagen über 1 kV. 3 Auflage. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1961.
[4] *Müller, R.*: Schutzmaßnahmen gegen zu hohe Berührungsspannung in Niederspannungsanlagen. 7. und 8. Auflage. Berlin: Verlag Technik 1981 und 1987.