

Praktische Grundlagen von Regelsystemen

Systeme 1. Ordnung mit der Systemanalyse eines Elektroantriebes

Prof. E. Dittmar, Gummersbach

Der Beitrag orientiert sich an dem Systembegriff, der Systemanalyse und der Optimierung von Regelsystemen in der modernen Regelungstechnik. Es handelt sich nicht um ein bloßes Umbenennen, sondern führt über den direkten Ansatz von Energiespeicherung zusammen mit dem Systembegriff zu einer einfacheren Systemanalyse mit dem direkten mathematischen Ansatz der Differentialgleichungen des zu regelnden Systems.

1 Einführung

Der Autor hat die Vorteile dieses System-Denkens in seiner industriellen Praxis in der Forschung und Entwicklung einer amerikanischen Firma schon recht früh kennen gelernt und sein Lehrbuch „Grundlagen und Optimierung von Regelsystemen“ [1] genannt. Das zu regelnde System ist der „Boss“ in dem Regelkreis (Bild 1), und der Regler R ist der „Buttler“, der dem System zu dienen hat.

Aber nicht nur in Amerika, sondern auch in den osteuropäischen Ländern ist das System-Denken recht früh angewandt worden. Eine Hochburg in Deutschland ist seit langem die TU Dresden. Dass sich der Systembegriff allgemein durchsetzt, zeigt auch der Dubbel [2].

Oft sieht man allerdings Lehrbücher, die primär von den zahlreichen Gerätebeschreibungen ausgehen und dann das dynamische Verhalten ableiten. Dies führt zu einem Nebeneinander, ohne dass der innere Zusammenhang klar wird, den die Regelungstechnik ausmacht.

2 Systembegriff und Systemklassen

Die Begriffe Strecke oder Regelstrecke sind noch weit verbreitet und auch in der DIN verankert. Die Bezeichnung Strecke kommt ursprünglich aus dem Bergbau und ist das Stück, das der Bergmann als Hauer vor sich hat, so wie der Regler die Regelstrecke (Bild 1). Hier wird bevorzugt der Begriff des zu regelnden Systems oder einfach System verwendet. Auch in der amerikanischen Praxis heißt es Control Systems. Die Darstellung des Systems erfolgt mathe-

matisch in Form der komplexen Übertragungsfunktion. Bei der Optimierung ist dies sehr sinnvoll, da die Reihenschaltungen die Kompensation der Verzögerungen durch die PI-PD-Komponenten des Reglers in dem zu regelnden System erst ermöglicht. Ein weiteres wichtiges Element im komplexen Übertragungsbereich ist die Signalfluss-Diagramm-Algebra, ein Spezialgebiet der Graphentheorie. Hiermit lassen sich mehrere Elemente S_i eines Systems auf ein Gesamtsystem S reduzieren, z. B. beim Elektroantrieb von sechs auf ein Element. Der Zeitverlauf nach der Differentialgleichung ist für die Optimierung schlecht zu gebrauchen. Aber die Differentialgleichung zusammen mit der Zeitfunktion hat ganz klar den Vorteil, dass diese den optimalen Verlauf der Regelgröße x dieses Systems besser beschreibt.

Die Zeitfunktion $x_a = f(t)$ ist über den Laplace-Operator $d/dt = s$ mit der komplexen Übertragungsfunktion $F_s = f(s)$ direkt verbunden, was später noch näher untersucht wird.

Dies gilt aber nur für lineare Systeme. Daher ist der noch zu erbringende Beweis sehr wichtig: Alle technischen Systeme sind stetig, stetig differenzierbar, linear oder im Arbeitspunkt linearisierbar.

3 Systemdefinition

Ein System wird in einem in sich abgeschlossenen Gebiet beschrieben. Die Aus-

gangsgröße x_a ist die Systemantwort auf die Eingangsgröße x_e , gewandelt mit dem Systeminhalt F_s (Bild 2a). Der Systeminhalt wird durch die Art der Energiespeicherung bestimmt.

Eine Black-Box-Theorie, zu deutsch ein schwarzer Kasten, über dessen Inhalt nichts bekannt ist, gibt es nicht. Denn als Folge wäre auch keine Aussage über das oben definierte Systemverhalten möglich. Im abgeschlossenen Gebiet, der Box, muss mindestens bekannt sein, welche Art der Energie speicherbar ist.

Energie ist die Fähigkeit Arbeit zu leisten. Die Art der Energie (elektrische, thermische oder mechanische) bestimmt, welche Arbeit von der Arbeitsmaschine geleistet werden kann. So erzeugt ein elektrischer Antrieb an seiner Welle mechanische Energie, um ein Bohrwerk anzutreiben. Dabei ist es z. B. die Aufgabe, über die Drehzahl die Schnittgeschwindigkeit durch die Regelung konstant zu halten.

Es wird hier bewusst primär von Energiespeicherung und vom Speicher gesprochen, weil dies die natürlichen Eigenschaften eines Systems sind. Im Zustand der Ruhe, d. h. das System ist ausgeschaltet, ist gar keine Energie im System vorhanden.

3.1 Systeme, Systemenergie und Ordnung des Systems

Die Energiespeicherung und -umwandlung bestimmt die Art des Systems und die Anzahl N der Energiespeicher die Ordnung des Systems, das sich mathematisch in dem Grad der Differentialgleichungen ausdrückt. Daraus folgt, dass der Systembegriff mit dem Energiebegriff unmittelbar verbunden ist.

Ohne Energie kann kein System zum Leben erweckt werden. Die Art der Energiespeicherung bestimmt das System.

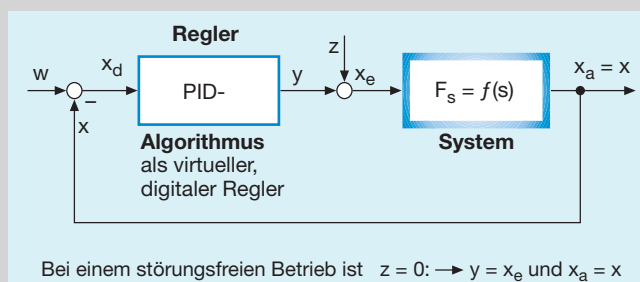
4 Antriebsregelung

Die meisten modernen Elektromotoren arbeiten mit Permanentmagneten. Die Wicklung liegt außen, speziell bei Drehstrommotoren. Der Läufer ist als Permanentmagnet ausgebildet, der zusammen mit dem Getriebe (Übersetzung $\ddot{u} > 1$) und der angekoppelten Last, die anzutreibende

Autor

Prof. Edgar Dittmar ist beamteter Professor für elektronische Steuerungstechnik, Regel- und Computersysteme der Universität Siegen.

1 Bezeichnungen an Regelsystemen



Arbeitsmaschine, den mechanischen Energiespeicher der Massenträgheit Θ , bildet. Wie Versuche zeigen, ist die Induktivität der Ständerwicklung bei einem Motor mit einer Leistung $P < 1$ kW und darunter absolut vernachlässigbar.

Daraus folgt, dass die Dynamik des Elektromotors nur von der mechanischen Zeitkonstante T bestimmt wird. Solche Elektroantriebe sind dynamisch also rein mechanische Systeme. Ferner ergibt sich daraus, dass der Drehstrommotor dieselbe Dynamik wie der Gleichstrommotor hat. Somit gelten die nachfolgenden Ableitungen für beide Arten von Motoren.

Dies ist ein weiterer starker Beweis für die Effektivität der Systemtheorie.

Damit hat der Motor als System einen mechanischen Energiespeicher der Massenträgheit Θ und damit eine System-Zeitkonstante T_m des Motors

$$T_m = k_{mech} \Theta \quad (1)$$

In dem Faktor k_{mech} sind die konstruktiven Konstanten des Motors enthalten. Bei nur einer System-Zeitkonstante T_m ergibt sich notwendig ein System 1. Ordnung mit der Differentialgleichung 1. Ordnung

$$T_m = \frac{d}{dt} n + n = K_m U_m \quad (2)$$

Darin ist der Motor-Übertragungsfaktor

$$K_m = \frac{n}{U_m} = \frac{n_0}{U_{m,0}} \left[\frac{\text{U/min}}{\text{V}} \right] \quad (3)$$

Der Elektromotor ist ein elektro-mechanischer Energiewandler. Dies erkennt man aus der Dimension des obigen Übertragungsfaktors.

Die Eingangsgröße ist die elektrische Motorspannung U_m [V] und die Ausgangsgröße die mechanische Größe der Drehzahl n [U/min]. Diese Energieumwandlung beschreibt genau der Übertragungsfaktor K_m . Wenn man die Dimensionen im Übertragungsfaktor durch Normierung beseitigt, was in manchen Büchern als großer Vorteil angesehen wird, so wird die klare Funktion des Übertragungsfaktors nach obiger Gleichung 3 verschleiert.

In der Massenträgheit Θ des Läufers und der Arbeitsmaschine wird die kinetische Energie der Drehbewegung E_k gespeichert. Die gesamte Energiebilanz nach dem Energiesatz ist

$$E_e = E_k + E_0 \quad (4)$$

Darin ist E_e die gesamte elektrische Energie und E_k die kinetische Energie für den Hochlauf des Motors. Der Energieanteil $E_{0,Leer}$ wird im Leerlauf ($z = 0$) gebraucht, um die Reibung zu überwinden, oder als Energie $E_{0,N}$ für die Arbeitsmaschine, wenn diese im Nennbetrieb arbeitet.

Die Energien betragen:

$$E_e = U_{m,0} \int_0^{5T} i_m dt \quad (5)$$

$$E_k = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 \text{ mit } \omega = \frac{2\pi}{60} n$$

$$\rightarrow \omega = \frac{\pi}{30} n \text{ mit } n \text{ in [U/min]} \quad (6)$$

Die mechanische Energie wird von der elektrischen Energie E_e , d. h. Arbeit, eingebracht:

$$E_e = U_{m,0} \int_0^{5T} i_m dt \quad (7)$$

Darin ist die anliegende Motorspannung $U_{m,0}$ (Bild 2c) konstant und darf vor das Integral gezogen werden. Der Motorstrom ist im Anlaufmoment $t=0$ maximal:

$$i_m = I_{\max} \quad (8)$$

Der Ausgleichszustand ist praktisch nach Ablauf von 5 System-Zeitkonstanten T zum Zeitpunkt t_0 erreicht, theoretisch erst nach $t \rightarrow \infty$

$$t_0 = 5T \quad (9)$$

Der Motorstrom geht im Leerlauf der Arbeitsmaschine, d. h. nach Bild 1 mit $z=0$ fast auf Null. Es wird nur ein kleiner Leerlaufstrom $I_{0,leer}$ für die Überwindung der Lagerreibungen benötigt. Bei größeren Motoren mit der Leistungen $P_m > 1$ kW ist wegen der guten Kugellager dieser Strom $I_{0,leer} \ll 1$ A.

Bei Nennbelastung der Arbeitsmaschine wird der Motorstrom zum Strom $I_{0,N}$ bei Nennlastbetrieb

$$i_m = I_{0,N} \quad (10)$$

Damit ist die elektro-mechanische Energieumwandlung des Motors nach dem Energiesatz mathematisch beschrieben.

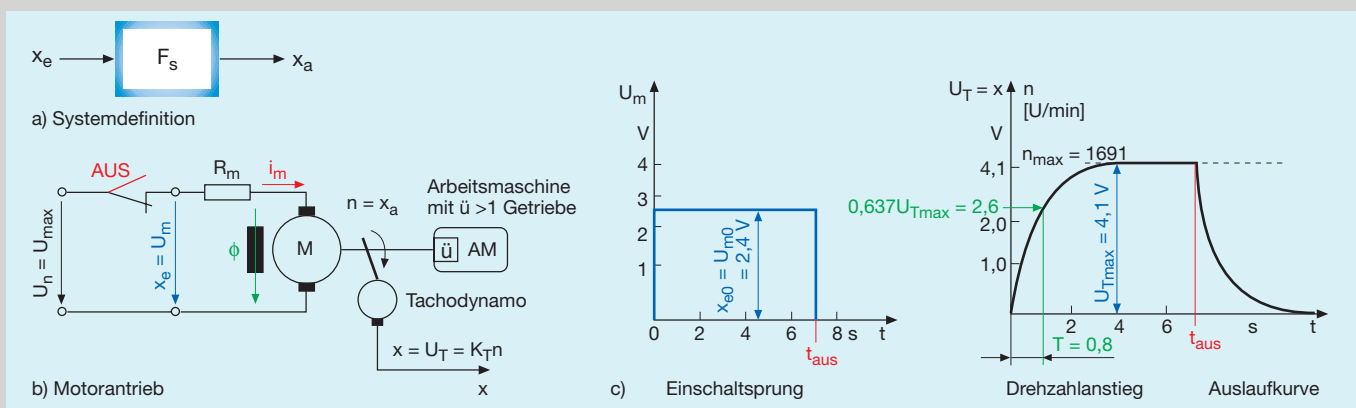
Führt man nun die Systemgrößen nach Bild 2 in Gleichung 2 mit $n=x_a$ und $U_m=x_e$ sowie mit der allgemeinen Zeitkonstante $T_m=T$ und dem Übertragungsfaktor K_m ein, kommt man auf die Standard-Differentialgleichungen für Systeme 1. Ordnung:

$$T \frac{d}{dt} x_a + x_a = K x_e \quad (11)$$

Die Standardlösung als Übergangsfunktion beim Eingangssprung x_{e0} ist (Bild 2c):

$$x_a = K x_{e0} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (12)$$

Hier zeigt sich der Vorteil des gekoppelten System-Energie-Ansatzes, weil man mit dem direkten Ansatz über die Anzahl der Energiespeicher $n=1$ auf die Anzahl der System-Zeitkonstanten $ASZ=1$ und damit auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung nach Gleichung 11 kommt.



2 Das Systemverhalten eines Motorantriebs als System 1. Ordnung

Der andere Weg der Einzelanalyse mit den Zwischengrößen Motorstrom I_m , induktive Quellspannung U_q , Ständerwiderstand R_m und andere ist viel aufwendiger.

4.1 Dimensions- und numerische Betrachtungen.

Die Dimensions-Betrachtung der obigen Differentialgleichung 11 beweist nochmals die Richtigkeit des gekoppelten System-Energie-Ansatzes.

Was oft nicht beachtet wird, ist die Tatsache, dass das Differential dt [s] als physikalische Größe die Dimension der Zeit t hat, die dann durch die Zeitkonstante T [s] kompensiert wird. Dies ist ein indirekter Beweis, dass der direkte gekoppelte System-Energie-Ansatz zur richtigen Differentialgleichung führt. Die Dimensionsuntersuchung soll mit der Drehzahl $n = x_a$ und der Motorspannung U_m als Eingangsgröße fortgesetzt werden. Man kann mit den Dimensionen rechnen wie mit Konstanten:

$$\begin{aligned} T_m \frac{d}{dt} n [\text{U/min}] + n [\text{U/min}] \\ = K_m U_m \left[\frac{\text{U/min}}{\text{V}} \right] \cdot [\text{V}] \end{aligned} \quad (13)$$

Die Enddimension ist auf beiden Seiten die der Drehzahl n [U/min].

4.2 Berechnung der Systemkonstanten

Es wurde ein kleiner Servomotor im Labor des Autors untersucht. Es wurde bewusst ein kleinen Motor mit einer Leistung $P=100$ W genommen, da ein kleinerer Motor schwerer regelbar ist als ein großer. Der kleine Motor reagiert schneller auf Schwankungen als ein großer mit seiner größeren Massenträgheit, denn diese wirkt auf Schwankungen stärker glättend.

Ferner wirkt sich die Reibung beim kleinen Motor viel stärker aus. Dies zeigt sich bei der Drehzahlumkehr. Untersuchungen haben ergeben, dass beim Drehrichtungs-

wechsel von Rechts- auf Linkslauf beim Nulldurchgang der Drehzahl $n=0$, diese einige Zeit auf der Null-Linie verweilt bis die Drehzahl in den negativen Bereich eintritt.

Ferner läuft der große Motor im Regelkreis genauso stabil wie der kleine, da bei beiden die Phasen-Nacheilung $\varphi=-90^\circ$ beträgt. Somit sind beide Motortypen gleich stabil. Als Vergleichsmotor wird ein Drehstrommotor $P=1,5$ kW mit Permanentmagnet genommen. Es kommt hier insgesamt das Worst-Case-Verfahren zur Anwendung.

In vielen Fachbüchern werden Zahlenwerte großzügig übergangen. Dort sind alle Größen vorgegeben, was aber in der Praxis nie der Fall ist. Für die praktischen Anwendungen sind zahlenmäßige Untersuchungen von entscheidender Bedeutung. Die beste in sich geschlossene Theorie taugt nichts, wenn sie dem praktischen Versuch nicht standhält.

Die Werksangaben zu den Systemkonstanten K und T für elektromotorische Antriebe sind weder auf dem Typenschild noch in den Motorlisten vorhanden. Hier hilft nur das Messen im Versuch, wie dies im Bild 2c dargestellt ist. Dazu wird ein Eingangssprung $U_{m,0}$ als Eingangsgröße x_{e0} gegeben und der Drehzahlverlauf $x=f(t)$ über den Tachodynamo K_T gemessen.

Für die Messungen der Eingangsspannung $U_{m,0}$ und der maximalen Tachometer-Spannung U_{Tmax} wird ein Digital-Voltmeter verwendet, weil die Berechnungen der Systemkonstanten von diesen gemessenen Werten ausgehen und daher so genau wie möglich sein müssen, was sich später bei der Optimierung günstig bemerkbar macht. Den Drehzahlverlauf zeichnet der Tachodynamo auf (Bild 2c).

Die Methode als Drehzahlgeber einen Tachodynamo K_T mit der Gleichung

$$x = U_T = K_T \cdot n \quad (14)$$

zu nehmen, ist eine präzise und vor allem universelle Methode zur Drehzahlerfassung sowohl für die analoge als auch für die digitale Regelung. Diese Methode wird auch bei der Antriebsregelung mit größeren Drehstrommotoren angewandt.

Ferner trennt der Drehzahlgeber den Signal- vom Energiefluss. Es ist die Hauptaufgabe der Regelung mit dem Signalfluss den Energiefluss zu steuern, der zum Antrieb einer Arbeitsmaschine dient.

Aus der Übertragungsfunktion nach Bild 2c berechnet sich der Übertragungsfaktor K_{m1} zu

$$\begin{aligned} K_{m1} &= K_m K_T = \frac{U_{Tmax}}{U_{m0}} \\ &= \frac{4,1 \text{ V}}{2,4 \text{ V}} = 1,708 \end{aligned} \quad (15)$$

Der Übertragungsfaktors K_m berechnet sich aus der maximalen Drehzahl $n_{max}=1691 \text{ U/min}$

$$\begin{aligned} K_m &= \frac{x_{a0}}{x_{e0}} = \frac{n_{max}}{U_{m0}} \\ &= \frac{1691 \text{ U/min}}{2,4 \text{ V}} = 817,1 \frac{\text{U/min}}{\text{V}} \end{aligned} \quad (16)$$

Die Bestimmung der System-Zeitkonstante T folgt aus der Lösung von Gleichung 12

$$x_a = Kx_{e0}(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (17)$$

zusammen mit der Übertragungsfunktion nach Bild 2c.

Es wird die Zeitkonstante T zum Zeitpunkt bestimmt

$$t = T = T_m \quad (18)$$

In die obige Gleichung 17 eingesetzt

$$x_a = Kx_{e0}(1 - \frac{1}{e}) \quad (19)$$

$$x_a = 0,637 \cdot Kx_{e0} \rightarrow x_a = 0,637 \cdot x_{a,max} \quad (20)$$

Dieser Wert wird in das Diagramm eingetragen. Der Schnittpunkt mit der Drehzahlkurve ergibt den Wert der System-Zeitkonstanten

$$T = 0,8 \text{ s} \quad (21)$$

In dieser System-Zeitkonstanten T ist die gesamte Massenträgheit Θ , die des Läufers des Motors, die der Zahnräder des Getriebes $u>1$, der Arbeitsmaschine und selbst die kleine Massenträgheit des Tachodynamos enthalten (Bild 2c).

Damit lauten die Systemkonstanten:

$$K_{m1} = \frac{U_{Tmax}}{U_{m0}} = 1708 \quad (22)$$

$$K_m = \frac{x_{a0}}{x_{e0}} = \frac{n_{max}}{U_{m0}} = 817 \frac{\text{U/min}}{\text{V}} \quad (23)$$

$$T_m = 0,8 \text{ s} \quad \text{Systemzeitkonstante} \quad (24)$$

5 Fazit

Bei der Einführung des Systembegriffs handelt es sich nicht um ein einfaches Umbenennen am Regelkreis nach Bild 1, sondern es führt über den direkten Ansatz von Energiespeicherung mit der Zeitkonstante T nach Gleichung 1 zusammen mit dem Systembegriff zu einer einfacheren Systemanalyse mit dem direkten mathematischen Ansatz der Differentialgleichung 2. Der Elektromotor ist im Gegensatz zur RC-Kombination ein aktives System, das die elektrische Energie in mechanische umwandelt, und hat damit einen Übertragungsfaktor $K_{m1}>1$ (siehe Gleichungen 3, 22, und 23). Die RC-Kombination ist ein passives System, das dadurch gekennzeichnet ist, dass der Übertragungsfaktor $K_{RC}=1$ beträgt, wie bei allen passiven Systemen, was später noch untersucht wird.

Da der elektrische Teil weder beim Gleichstrom- noch beim Drehstrommotor in die Dynamik eingeht, sind beide Elektromotoren rein mechanische Systeme und haben die gleiche Differentialgleichung 2, da es für die Systemdynamik gleich ist, in welcher Form die elektrische Energie E_e dem zu regelnden System zugeführt wird (siehe Gleichung 4 und 5).

In einem folgenden Beitrag soll der Beweis für die Stetigkeit, stetige Differenzierbarkeit mit dem analogen Verhalten aller technischen Systeme erbracht werden.

Literatur

- [1] Dittmar, E.: Grundlagen und Optimierung von Regelsystemen. 4. Auflage, Druckerei K. Urlaub Bamberg 1990
- [2] Beitz W., Grote K.-H.: Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau. 20. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag 2001