8 · 2010

LERNEN und KÖNNEN

ELEKTROPRAKTIKER-Magazin
für die Aus- und Weiterbildung

Elektrotechnisch bedeutende Funktionsgleichungen (2)

Abhängigkeitsverhältnisse zwischen elektrischen Größen lassen sich durch Funktionsgleichungen beschreiben. Im ersten Teil wurden Funktionen im Allgemeinen sowie im Gleichstromkreis besprochen. Hier sind funktionale Abhängigkeiten im Wechselstromkreis das Thema.

Abhängigkeiten im Wechselstromkreis

Gleichspannungen und -ströme können über einen längeren Zeitabschnitt konstante Beträge haben. Ist hingegen der Spannungs- bzw. Strombetrag zeitabhängig, so handelt es sich um Wechsel- oder Mischgrößen. Der zeitliche Verlauf ist dann regelmäßig, wenn der Verlauf der Größe sich nach einer entsprechenden Zeit – nach einer Periode – wiederholt. Periodische Größen mit sinusförmigem Verlauf sind Gegenstand der folgenden Aussagen.

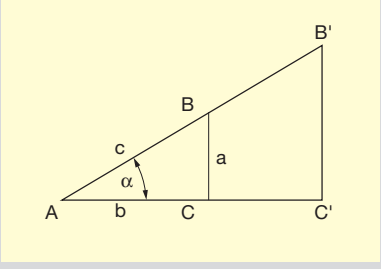
Winkelfunktionen. Eine Winkelfunktion ist nach den Festlegungen der elementaren Geometrie ein Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck (Bild ❶). Bezogen auf den Winkel α wird das Verhältnis der Seite a (Gegenkathete) zur Seite c (Hypotenuse) als Sinus bezeichnet. Auch im größeren Dreieck A B´C´ ist der Betrag des Verhältnisses von Gegenkathete zur Hypotenuse gleich dem im kleineren Dreieck A B C. Dies trifft auch auf die anderen Seitenverhältnisse zu:

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

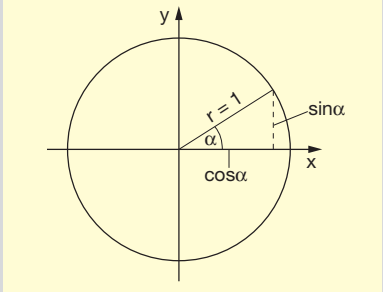
$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}.$$

Die Beträge der Seitenverhältnisse ändern sich dann, wenn der Winkel α größer oder kleiner wird. Eine allgemeine Erklärung über die funktionale Abhängigkeit zum Beispiel des Sinus und des Kosinus für beliebige Winkel kann am Einheitskreis gegeben werden (Bild ❷). Mit den Bezeichnungen x für die Abszisse (Ankathete), y für die Ordinate (Gegenkathete) und $r = 1$ für den Radius des Einheitskreises (Hypotenuse) ist der entsprechende Ordinatenabschnitt gleich dem Sinus des



❶ Seitenverhältnisse des rechtwinkligen Dreiecks



❷ Sinus und Kosinus am Einheitskreis

INHALT

Grundwissen Lernfelder 1-5

Elektrotechnik
Elektrotechnisch bedeutende Funktionsgleichungen (2) 1

Fachbegriffe
Was versteht man unter 4

Fachwissen Lernfelder 6-13

Software
Geometriesoftware – statt Zirkel und Lineal 5

Regelungstechnik
Linearisierung von Widerstands-Sensorkennlinien (3) 7

WISO
Wirtschafts-, Sozial- und Gemeinschaftskunde 8

Antennentechnik
Koaxiales Verteilungssystem (3) 9

Arbeitssicherheit
Arbeiten mit Leitern und Tritten (2) 11

Fremdsprache
Technisches Englisch 13

Prüfung Lernfelder 1-13

Fachtest
Antriebstechnik 14
Computertechnik 15

Lösungen 16

Impressum

ep – LERNEN und KÖNNEN
Magazin für die Aus- und Weiterbildung
HUSS-MEDIEN GmbH
Am Friedrichshain 22; 10407 Berlin
Tel. 030 42151-378, Fax 030 42151-251

Redaktion:
Rüdiger Tuzinski (Redaktionsleiter),
Hein Elster, Heino Hackbarth (Redakteure),
Sabine Funke (Layout), *Petra Richter* (Zeichnungen)

Schülerservice
Abo-Verwaltung und Vertrieb:
Directa Buldt Fachverlag
Lübecker Str. 8; 23611 Bad Schwartau
Tel. 0451 49999-0, Fax 0451 49999-40

Erscheinungsweise:
Monatlich als Beilage der Zeitschrift Elektropraktiker

Winkels α und der Abszissenabschnitt gleich dem Kosinus. Die Funktionsgleichung des Ordinatenabschnitts lautet dann $y = \sin\alpha$ und die des Abszissenabschnitts $x = \cos\alpha$.

Die Winkelfunktionen sind periodische Funktionen, das heißt ihre Werte wiederholen sich, wenn x um eine Periode gewachsen ist. Die Periode beträgt bei der Sinus- und Kosinusfunktion 360°. Die Einteilung eines Vollwinkels in 360° ist sehr alt. Die Nachteile der 360°-Teilung liegen in ihrer Willkürlichkeit; sie steht in keinem Zusammenhang mit der Zahleneinheit. Die Mathematik gibt deshalb den Winkel auch im Bogenmaß $\hat{\alpha}$ an. Da der Kreisumfang $2 \cdot \pi \cdot r$ dem Winkel 360° zuzuordnen ist, ist im Einheitskreis $r = 1$ die Maßzahl des ganzen Umfangs 2π, die 360° entspricht. Die Umrechnung jedes beliebigen Winkels vom Grad- ins Bogenmaß und umgekehrt kann deshalb mit der Proportionsgleichung $\alpha : 360° = \hat{\alpha} : 2\pi$ vorgenommen werden.

Nach dieser Gleichung hat ein Winkel im Bogenmaß die Einheit 1 m/m bzw. die Einheit „1“. Um Eindeutigkeit zu erreichen, wird nach DIN 1301 Teil 1 die Einheit als 1 Radiant bezeichnet: 1 rad ist der Winkel zum Bogen 1 im Einheitskreis.

Sinusfunktion. Der Graph der Sinusfunktion ist eine zusammenhängende Wellenlinie (Bild ❸). Dem Bild können die Funktionswerte (Tafel ❶) in den einzelnen Quadranten entnommen werden.

Wechselspannung. Prinzipiell wird eine Wechselspannung durch die Drehung einer Leiterschleife im parallelhomogenen Magnetfeld erzeugt. Bei einer konstanten Drehzahl und damit bei einer konstanten Umfangsgeschwindigkeit wird der Betrag der induzierten Spannung von der senkrechten Geschwindigkeitskomponente bestimmt, mit der die magnetischen Feldlinien geschnitten werden. Die Geschwindigkeitskomponente ändert sich dabei in Abhängigkeit von der Stellung der Leiterschleife, von ihrem Drehwinkel α, sinusförmig. Es entsteht deshalb eine sinusförmige Wechselspannung. Die Augenblickswerte der Spannung sind eine Funktion des Drehwinkels α und folgen den Funktionsgleichungen:

$$u = \hat{u} \cdot \sin\alpha \text{ bzw. } u = \hat{u} \cdot \sin\hat{\alpha} \qquad (13)$$

Scheitelwert. Bei $\alpha = 90°$ hat der Augenblickswert seinen höchsten Betrag, den Scheitel-, Höchst- oder Maximalwert $\hat{u}$. Dieser ist von den konstanten Größen Magnetflussdichte, wirksame Leiterlänge und Umfangsgeschwindigkeit der Leiterschleife sowie des Magnetfeldes abhängig.

Frequenz. Nach Ablauf einer vollständigen Drehung der Leiterschleife $\alpha = 360°$ bzw. $\hat{\alpha} = 2\pi$ ist eine Schwingung mit einer positiven und negativen Halbwelle entstanden. Die Zeit für den Ablauf einer Schwingung wird als Periodendauer T bezeichnet. Ihr Kehrwert ist die Frequenz der Spannung:

$$f = \frac{1}{T} \qquad [f] = \frac{1}{\text{s}} = 1\text{Hz}. \qquad (14)$$

Kreisfrequenz. Die Geschwindigkeit ω, mit der die Leiterschleife den Winkel $\hat{\alpha}$ durchläuft

$$\omega = \frac{\hat{\alpha}}{t}, \qquad (15)$$

ist gleich der Geschwindigkeit, mit der sich die Augenblickswerte der induzierten Spannung ändern. Bei $t = T$ durchläuft die Leiterschleife den Winkel $\hat{\alpha} = 2\pi$, so dass die Geschwindigkeit

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \text{ ist.} \qquad (16)$$

Damit wird nach Gleichung (16) die Geschwindigkeitsgröße in der Elektrotechnik sinnvollerweise als Kreisfrequenz bezeichnet. Nach (15) umgestellt ist $\hat{\alpha} = \omega \cdot t$.

Funktionsgleichung. Für eine sinusförmige Spannung ergeben sich deshalb drei Formen als Funktionsgleichung:

$$u = \hat{u} \cdot \sin\alpha$$
$$u = \hat{u} \cdot \sin\hat{\alpha} \qquad (17).$$
$$u = \hat{u} \cdot \sin\omega \cdot t$$

Die Augenblickswerte einer sinusförmigen Spannung sind somit eine Funktion

- des Winkels α im Gradmaß $u = f(\alpha)$
- des Winkels α im Bogenmaß $u = f(\hat{\alpha})$
- der Zeit t $u = f(t)$

Bei der Darstellung der Sinusfunktion im Koordinatensystem kann mithin die Abszisse mit einer der drei gleichwertigen Größen bezeichnet werden.

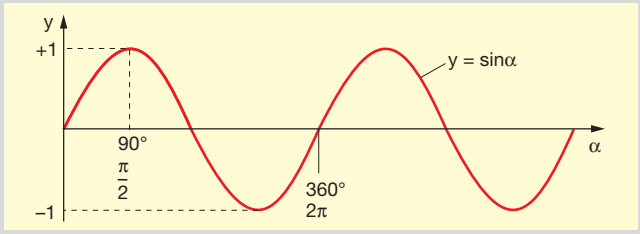
Wechselstrom. Die vorstehenden physikalischen Zusammenhänge können ohne Einschränkung auch auf Wechselströme übertragen werden. In den Funktionsgleichungen (17) sind die Formelzeichen der Spannungsgrößen durch die der Stromgrößen zu ersetzen. So lautet zum Beispiel das Sinus-Zeit-Gesetz eines Wechselstromes:

$$i = \hat{i} \cdot \sin\omega \cdot t \qquad (18).$$

Der Augenblickswert des Stromes ist eine Funktion der Zeit.

Einschaltmoment. Die Spannungs- und Stromgrößen werden am Verbraucher erst wirksam, wenn der Stromkreis geschlossen wird. Es ist sinnvoll den Einschalt-

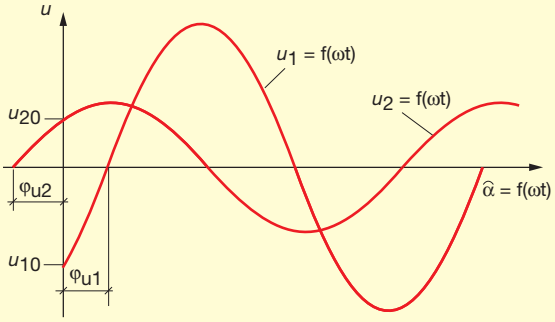
❸ **Graph der Sinusfunktion**



Tafel ❶ Mögliche Funktionswerte und Vorzeichen in den einzelnen Quadranten

Quadrant	I	II	III	IV
Funktionswert der Sinusfunktion	steigt von 0 bis 1	fällt von +1 bis 0	fällt weiter von 0 bis -1	steigt von -1 bis 0
Vorzeichen der Funktionswerte	+	+	–	–

❹ **Nullphasenwinkel zweier Spannungen**



Tafel ❷ Auswirkungen unterschiedlicher Nullphasenwinkel

Bezugsgröße	Spannung 1	Spannung 2
Nullphasenwinkel	$\varphi_{u1} = 0$	$\varphi_{u2} = 0$
Phasenverschiebungswinkel	$\varphi = \varphi_{u2} - \varphi_{u1}$ $\varphi > 0$ positiv	$\varphi = \varphi_{u1} - \varphi_{u2}$ $\varphi < 0$ negativ
Funktionsgleichung der Bezugsgröße der anderen Größe	$u_1 = \hat{u}_1 \cdot \sin\omega t$ $u_2 = \hat{u}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	$u_2 = \hat{u}_2 \cdot \sin\omega t$ $u_1 = \hat{u}_1 \cdot \sin(\omega t - \varphi)$
physikalische Bedeutung	Spannung 2 eilt der Spannung 1 um den Phasenverschiebungswinkel φ voraus.	Spannung 1 eilt der Spannung 2 um den Phasenverschiebungswinkel φ nach.

moment als Zeitnullpunkt zu wählen. Nach Bild ❸ ist im Moment des Einschaltens der Augenblickswert der sinusförmigen Spannung gleich null. Die Wahrscheinlichkeit, gerade im Nulldurchgang zu schalten, ist gering, wobei ein beliebiger Zeitpunkt des Schaltens – außer bei Transformatoren – unproblematisch ist.

Das Liniendiagramm einer zweiten Spannung (Bild ❹) zeigt, dass sie die gleiche Frequenz wie die erste hat (gleiche Periodendauer). Die Spannungen unterscheiden sich jedoch

- in ihren Beträgen der Scheitelwerte $\hat{u}_1 > \hat{u}_2$, damit auch in ihren Effektivwerten $U_1 > U_2$ und
- in den Augenblickswerten zum Zeitnullpunkt $t = 0$: $u_{20} \neq u_{10}$.

Nullphasenwinkel. Die gegenseitige Verschiebung beider Sinuskurven entspricht einer zeitlichen Verschiebung gegenüber dem Zeitnullpunkt. Die Gleichungen (13) verlieren ihre Gültigkeit, da für $\alpha = 0°$ bzw. $t = 0$ die Augenblickswerte der Spannungen $u \neq 0$ sind. Die Größe der Verschiebung zum Zeitnullpunkt wird als Nullphasenwinkel bezeichnet. Man versteht darunter den Winkel zwischen dem positiven Nulldurchgang der Wechselgröße (Übergang des Augenblickswertes in den positiven Bereich) und dem Koordinatennullpunkt. Der Nullphasenwinkel kann sowohl positiv als auch negativ sein. Ein positiver Betrag bedeutet, dass der Nulldurchgang vor dem Zeitnullpunkt liegt. Im Bild ❹ sind die Nullphasenwinkel $\varphi_{u2} > 0$ (positiv) und $\varphi_{u1} < 0$ (negativ). Die Gleichungen (13) und (18) müssen durch die entsprechenden Nullphasenwinkel erweitert werden:

$$u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{u0}) \qquad (19)$$

$$i = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{i0}) \qquad (20)$$

ωt ist ein Winkel im Bogenmaß und nur gleichartige Größen dürfen addiert werden.

Phasenverschiebungswinkel. Wenn Wechselgrößen gleicher Frequenz zu unterschiedlichen Zeiten ihre Höchstwerte oder Nulldurchgänge erreichen, werden sie als phasenverschoben bezeichnet. Die Größe der Phasenverschiebung wird als Winkel – Phasenverschiebungswinkel φ – angegeben. Er ergibt sich als Differenz der vorzeichenbehafteten Nullphasenwinkel der Wechselgrößen. Zur Veranschaulichung wird im Bild ❹ die Ordinatenachse $t = 0$ so gelegt, dass der Nullphasenwinkel einer Spannung verschwindet. Es ergeben sich dann zwei Möglichkeiten (Tafel ❷). Für die Vorgaben des Bildes ❹ sind beide Aussagen über die Phasenverschiebung bedeutungsgleich. Das Vorzeichen des Phasenverschiebungswinkels hängt ausschließlich von der Wahl der Bezugsgröße ab.

Leistungsbetrachtungen. Insbesondere für die folgenden Leistungsbetrachtungen ist die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung im Wechselstromkreis bedeutsam. Der Phasenverschiebungswinkel zwischen beiden sinusförmigen Größen kann maximal nur 90° betragen.

Im Gleichstromkreis bestimmen die Spannung U und die Stromstärke I die Leistung: $P = U \cdot I$.

Auf die veränderlichen Größen des Wechselstromkreises bezogen heißt das: Nur die zeitgleich auftretenden Augenblickswerte der Spannung und des Stromes ergeben einen Leistungswert. Dieser wird damit auch wieder eine zeitabhängige Größe. Die Gleichung für den Augenblickswert der Leistung $p = u \cdot i$ gilt für alle Kurvenformen von Wechselgrößen sowie für alle Grundschaltelemente und ihre Zusammenschaltungen. Die Gleichung ist deshalb allgemeingültig. Die Schwierigkeit besteht jedoch darin, dass in der Technik prinzipiell mit den Effektivwerten von Strom und Spannung gerechnet werden muss. Ein Ergebnis lässt sich aufgrund der zeitlichen Veränderlichkeit der Faktoren u und i und einer möglichen Phasenverschiebung zwischen ihnen nicht so ohne Weiteres voraussagen.

Am ohmschen Widerstand liegen Strom und Spannung in Phase. Sowohl bei den positiven Halbwellen als auch bei den negativen beider Größen sind die Leistungswerte immer positiv. Es entsteht eine sich sinusförmig ändernde Leistung von doppelter Frequenz. Die Leistungskurve ist in positiver Richtung der Ordinatenachse verschoben. Stets positive Leistungswerte bedeuten gleich bleibende Richtung des Energieflusses. Die Leistung wird als so genannte Wirkleistung im Verbraucher in Wärmeenergie oder mechanische Energie umgewandelt. Sowohl am induktiven als auch am kapazitiven idealen Schaltelement beträgt die Phasenverschiebung 90°. Die Leistungswerte sind wechselweise positiv und negativ. Die Richtung des Energieflusses ändert sich periodisch. Die als Blindleistung bezeichnete Leistung pendelt zwischen Wechselstromquelle und kapazitivem bzw. induktivem Schaltelement hin und her und wird in diesen kurzzeitig im elektrischen bzw. magnetischen Feld gespeichert.

Beliebige Phasenverschiebung

Vorbemerkung: Die Kosinusfunktion ist eine um 90° verschobene Sinusfunktion. Über den Klemmen eines passiven Zweipols entsteht bei einem Wechselstrom $i = \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{i0})$ der Spannungsfall $u = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{u0})$.

Die Zeitfunktion des Momentanwertes der Leistung $p(t)$ des passiven Zweipols folgt der Gleichung

$$p(t) = u \cdot i = \hat{u} \cdot \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{u0}) \cdot \cos(\omega t + \varphi_{i0}) \qquad (21)$$

Nach dem Additionstheorem für Produkte zweier Größen

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right]$$

mit $\alpha = \omega t + \varphi_{u0}$ und $\beta = \omega t + \varphi_{i0}$ kann Gleichung (21) auch in folgender Form geschrieben werden:

$$p(t) = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2}\left[\cos(\varphi_{u0} - \varphi_{i0}) + \cos(2\omega t + \varphi_{u0} + \varphi_{i0})\right]$$

bzw. mit den Effektivwerten

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi_{u0} - \varphi_{i0}) + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi_{u0} + \varphi_{i0}) \qquad (22).$$

Die rechte Seite der Gleichung besteht aus einem zeitunabhängigen Summand und einem mit doppelter Frequenz sich ändernden Summand.

Aus der analytischen Lösung erkennt man, dass die Funktionsgleichung (22) einer mit doppelter Frequenz von Strom und Spannung schwankender Wechselstromleistung zuzuordnen ist, deren Amplitude unabhängig von der Phasenlage zwischen u und i ist, deren Nulllinie aber von der Abszissenachse $p = 0$ um einen von der Phase $\varphi_{u0} - \varphi_{i0}$ = Phasenverschiebungswinkel φ zwischen I und U abhängigen Betrag $U \cdot I \cdot \cos\varphi$ verschoben ist. Dieser Betrag entspricht bei sinusförmigen Größen der Wirkleistung P, die eine Funktion vom Kosinus des Phasenverschiebungswinkels φ ist.

Fazit

Elektrische Stromkreise sind Systeme, deren Verhalten durch die Änderung der Eingangs- und Ausgangsgrößen gekennzeichnet werden. So führt eine Änderung der an einem Verbrauchsmittel anliegenden Spannung zwangsläufig zur Änderung der Stromstärke und seiner Leistung. Die Art der funktionalen Änderung kann in Worten, meist relativ weitschweifig oder eindeutiger und kürzer mathematisch beschrieben werden. Die abstrakte Form der Funktionsgleichungen wird dann für den Praktiker anschaulich, wenn das Verhalten von Bauelementen, Geräten und Maschinen durch Kennlinien dargestellt werden. Entscheidend ist, aus den mathematischen und grafischen Darstellungen die Ursache-Wirkungsbeziehungen der entsprechenden Größen zu erkennen.

H. Spanneberg