



Elektrotechnisch bedeutende Funktionsgleichungen (1)

Bei einer Widerstandserhöhung in einem Stromkreis sinkt die Stromstärke. Die Klemmen-spannung der einspeisenden Stromquelle erhöht sich jedoch. Die Änderung beider Größen ist zwangsläufig. Um die Art der Abhängigkeitsverhältnisse zwischen elektrischen Größen zu beschreiben, sind insbesondere für den Elektrotechniker Funktionsgleichungen anschauliche Hilfsmittel.

Funktionen im Allgemeinen

In jeder Gleichung mit den zwei Unbekannten x und y , zum Beispiel

$$y = x^2 - 7 \quad (1)$$

sind unendlich viele Wertepaare für x und y denkbar, welche diese Gleichung erfüllen. Setzt man etwa x der Reihe nach

-2; -1; 0; +1; +2; +3; +4;

so erhält man für y die entsprechenden Werte

-3; -6; -7; -6; -3; +2; +9;

Diese Größen sind veränderlich oder variabel, und zwar nennt man x , welches beliebig angenommen wird, die willkürlich oder unabhängig Veränderliche und y , dessen Wert von x abhängt, die abhängig Veränderliche:

y ist eine Funktion von x .

Mithin kann jede mathematische oder physikalische Formel als eine Funktion betrachtet werden, wenn man sich eine ihrer Größen als veränderlich vor-

stellt. Zum Beispiel zeigen uns die Formeln

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r$$

in welcher Weise der Umfang U eines Kreises vom Halbmesser r oder in

$$h = g/2 \cdot t^2$$

die Fallhöhe h eines luftleeren Raumes von der Ruhe aus unter dem Einfluss der Schwerkraft von der Fallzeit t abhängt.

Um ganz allgemein auszudrücken, dass y in irgendeiner Weise von x abhängig ist, schreibt man

$$y = f(x)$$

und sagt

„ y ist eine (beliebige) Funktion von x “.

Für die genannten Beispiele gilt $U = f(r)$ und $h = f(t)$, ohne die Art der Abhängigkeitsverhältnisse anzugeben. Außer den Variablen kommen noch Zahlengrößen wie π und die Fallbeschleunigung g vor, die ihren Betrag nicht ändern und daher konstante Größen – kurz: Konstante – genannt werden.

Es ist ohne Weiteres davon auszugehen, dass in der Gleichung $y = x^2 - 7$ die Abhängigkeit der Veränderlichen x und y eine gegenseitige ist oder mit anderen Worten: Wenn y eine Funktion von x darstellt, muss x ebenso eine Funktion von y sein. Dies wird deutlich, wenn die genannte Gleichung (1) nach x aufgelöst wird, wodurch für unseren speziellen Fall der folgende Ausdruck entsteht:

$$x = \pm\sqrt{y+7} \quad (2)$$

In der Mathematik kann für jede Funktion eine Umkehrfunktion (inverse Funktion) angegeben werden. In der Physik und Technik ist dies meist nicht möglich. Die als Kausalität bezeichneten Ursache-Wirkungsbeziehungen sind nicht umkehrbar. Dazu eine überzeugende Aussage: Weil es regnet, sind die Straßen nass. Aber: Weil die Straßen nass sind, regnet es. Hier fehlt die Logik!

INHALT

Grundwissen
Lernfelder 1-5

Elektrotechnik

Elektrotechnisch bedeutende
Funktionsgleichungen (1) 1

Fachbegriffe

Was versteht man unter 4

Fachwissen
Lernfelder 6-13

Software

Open Source – nicht nur für
Auszubildende 6

Regelungstechnik

Linearisierung von Widerstands-
Sensorkennlinien (2) 8

WISO

Wirtschafts-, Sozial- und
Gemeinschaftskunde 9

Antennentechnik

Koaxiales Verteilungssystem (2) ..10

Arbeitssicherheit

Arbeiten mit Leitern und Tritten 11

Fremdsprache

Technisches Englisch 13

Prüfung
Lernfelder 1-13

Fachtest

Grundlagen – Elektrotechnik.....14

Gebäudetechnik.....15

Lösungen 16

Impressum

ep – LERNEN und KÖNNEN
Magazin für die Aus- und Weiterbildung
HUSS-MEDIEN GmbH
Am Friedrichshain 22; 10407 Berlin
Tel. 030 42151-378, Fax 030 42151-251

Redaktion:

Rüdiger Tuzinski (Redaktionsleiter),
Hein Elster, Heino Hackbarth (Redakteure),
Sabine Funke (Layout), Petra Richter (Zeichnungen)

Schülerservice

Abo-Verwaltung und Vertrieb:
Directa Buldt Fachverlag
Lübecker Str. 8; 23611 Bad Schwartau
Tel. 0451 49999-0, Fax 0451 49999-40

Erscheinungsweise:

Monatlich als Beilage der Zeitschrift Elektropraktiker

Aus der Ausgangsfunktion (1) und ihrer Umkehrfunktion (2) ist ein wesentliches Unterscheidungsmerkmal abzuleiten. Es kann zwischen einwertigen oder eindeutigen und zweiwertigen (zweideutigen) Funktionen unterschieden werden, je nachdem, ob jedem Wert der unabhängig Variablen nur ein oder zwei Werte ($\pm$) zuzuordnen sind. Zur Vollständigkeit soll noch darauf verwiesen werden, dass aus der Sicht der Mathematiker eine Funktion reell genannt wird, wenn sie für reelle Werte der abhängigen Veränderlichen selbst reelle Werte annimmt und zwischen einfachen – im mathematischen Ausdruck wird für die unabhängig Veränderliche lediglich eine Rechenoperation vorgeschrieben – und zusammengesetzte Funktionen unterschieden werden.

Die Funktionen können nach unterschiedlichen Gesichtspunkten geordnet werden. In der Bild 1 wurde als Ordnungsgesichtspunkt die Rechenoperation der unabhängig Veränderlichen gewählt. Die für die Elektrotechnik bedeutsamen Funktionen wurden hervorgehoben.

Um vom Verlauf einer Funktion eine deutliche Vorstellung zu erhalten, werden meist in gleichen Abständen für die unabhängig Veränderliche die Werte

$$x_1; x_2; x_3; x_4; \dots x_n$$

gewählt und mit der Funktionsgleichung die zugehörigen Werte der abhängig Veränderlichen berechnet:

$$y_1 = f(x_1); y_2 = f(x_2); y_3 = f(x_3); y_4 = f(x_4), \dots y_n = f(x_n).$$

Ihre Indizes kennzeichnen die Wertepaare, die in eine Tafel eingetragen werden (Tafel 1).

Die Wertepaare geben in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Lage der Punkte $P_1; P_2; P_3; P_4 \dots P_n$ an. Dabei werden grundsätzlich auf der Abszissenachse (x-Achse) die unabhängig Veränderliche aufgetragen und auf der Ordinatenachse (y-Achse) die abhängig Veränderliche. Verbindet man die Punkte durch einen Kurvenzug, erhält man einen bildlichen Eindruck über die Änderung der Funktion zwischen x_1 und x_n . Die Funktion wächst, wenn die Kurve steigt bzw. nimmt ab, wenn die Kurve fällt. Die unterschiedliche Neigung der Kurve gegen die Abszissenachse kennzeichnet den Grad der Geschwindigkeit, mit der die Funktion sich ändert. Die gesetzmäßige Abhängigkeit zwischen Größen wird deshalb durch

Funktionsgleichung $\rightarrow$ Wertetabelle $\rightarrow$ Graph (Bild) im Koordinatensystem

beschrieben. In der Physik und Technik werden die Graphen der Funktionsgleichungen meist als Kennlinien bezeichnet.

Tafel 1 Beispiel für eine Wertetabelle

unabhängig Veränderliche	x_1	x_2	x_3	...	x_n
abhängig Veränderliche	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Ordnung der Funktionen

nach der Rechenoperation für die unabhängig Veränderliche

algebraische Funktionen

ganzzonale Funktionen n-ten Grades

$$y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

Sonderfälle

lineare Funktionen

$$y = f(x) = mx + n \quad (3)$$

quadratische Funktionen

$$y = f(x) = x^2 + p \cdot x + q$$

Potenzfunktionen

$$y = f(x) = x^n \quad (4)$$

mit

ganzzahligen Exponenten

gebrochenen Exponenten

Wurzelfunktionen

$$y = f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad (5)$$

gebrochene rationale Funktionen als Quotient ganzzonaler Funktionen

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ bei } v(x) \neq 0$$

transzendente Funktionen

trigonometrische Funktionen

Sinusfunktion

$$y = f(x) = \sin x \quad (6)$$

Kosinusfunktion

$$y = f(x) = \cos x$$

Tangensfunktion

$$y = f(x) = \tan x$$

Kotangensfunktion

$$y = f(x) = \cot x$$

Exponentialfunktionen

mit

Basis $a = 10$

$$y = f(x) = a^x \quad (7)$$

Basis $a = e$

$$y = f(x) = e^x$$

Logarithmusfunktionen

mit

Basis $a = 10$

$$y = f(x) = \log_a x$$

$$y = f(x) = \lg x$$

Basis $a = e$

$$y = f(x) = \ln x$$

1 Systematisierung der Funktionen

Abhängigkeiten im Gleichstromkreis

Die grundlegende Gesetzmäßigkeit der Elektrotechnik hat Georg Simon Ohm¹⁾ bereits in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts formuliert, als er den Begriff *elektrischer Widerstand* definierte. Aus der Fülle von Experimenten erkannte er, dass der Betrag eines Widerstandes unter gleichbleibenden Bedingungen konstant ist. Aus diesem Gesetz leitet sich das Strom-Spannungsverhalten eines Widerstandes ab:

Die Stromstärke I eines Verbrauchsmittels ist von der anliegenden Spannung U und dem Betrag des Widerstandes R abhängig.

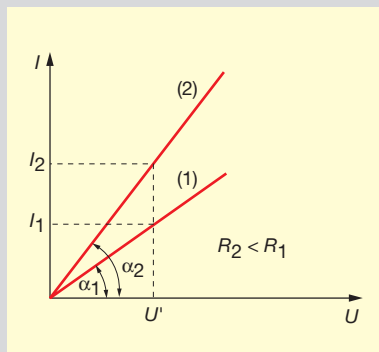
Strom-Spannungsverhalten eines Widerstandes

$$I = U/R \quad (8)$$

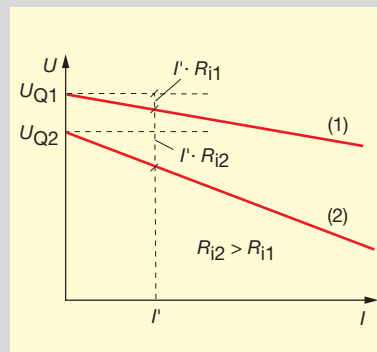
Die Stromstärke ändert sich zwangsläufig, wenn bei konstantem Widerstandswert die Spannung größer oder kleiner wird, das heißt die Stromstärke ist eine Funktion der anliegenden Spannung:

$$I = f(U)$$

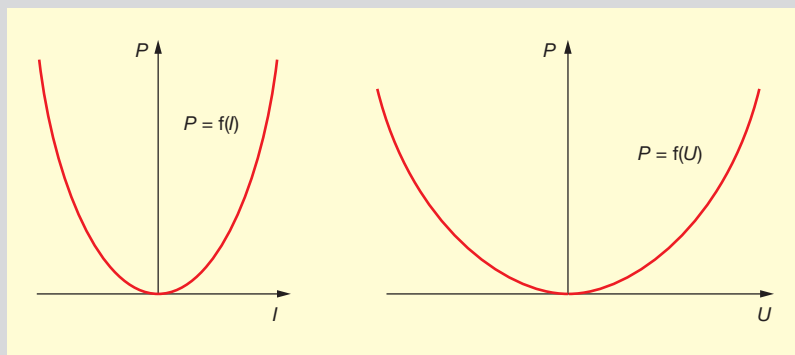
¹⁾ Ohm, Georg Simon: dt. Physiker 1777 – 1851.



② Strom-Spannungskennlinien der Bauelemente (1) und (2)



③ Belastungskennlinien der Stromquellen (1) und (2)



④ Quadratische Funktionen der elektrischen Leistung

Ein Vergleich mit den Funktionsgleichungen (Bild 1) zeigt, dass bei einer Vereinfachung der linearen Funktionsgleichung (8) durch $n = 0$ sie in der Form $y = m \cdot x$ der in (8) gegebenen Gleichung $I = 1/R \cdot U$ entspricht.

Das Bild der Funktionsgleichung (8) ist eine steigende Gerade, die im Nullpunkt beginnt (Bild 2). Es verdeutlicht die bekannten elektrischen Gesetzmäßigkeiten, denn bei $U = 0$ ist $I = 0$ und die Zunahme der Stromstärke, also der Anstieg der Geraden wird durch den Kehrwert des Widerstandes $1/R$ bzw. durch den Leitwert G bestimmt.

Der Anstiegswinkel in Gleichung (8) ist gleich dem Tangens des Anstiegswinkels α : $m = \tan \alpha = 1/R$.

Bei einem zweiten Bauelement mit $R_2 < R_1$ ist $\tan \alpha_2 > \tan \alpha_1$. Die Gerade des zweiten Widerstandes steigt stärker an. Im Bild 2 wird deutlich, dass bei gleichem Spannungswert U' die Stromstärke I_2 durch das zweite Bauelement größer als die des ersten ist.

Im Zusammenhang mit Bild 2 muss auf Folgendes verwiesen werden:

Häufig wird die lineare Funktion $U = f(I)$ dargestellt, die auf die Funktionsgleichung

$$U = I \cdot R \quad (9)$$

zurückzuführen ist. Vom physikalischen Standpunkt aus ist Gleichung (9) nicht die

Umkehrfunktion der Gleichung (8). Die Unsicherheit entsteht dadurch, dass für die Größen *antreibende Spannung* und *Spannungsfall* dasselbe Formelzeichen U verwendet wird. Die Ursache-Wirkungsbeziehungen sind nicht umkehrbar:

antreibende Spannung $\rightarrow$ Stromstärke
 $\rightarrow$ Spannungsfall.

Wird eine Stromquelle belastet, verringert sich durch den Spannungsfall über ihren Innenwiderstand R_i die auch am äußeren Stromkreisteil anliegende Klemmenspannung U . Die Klemmenspannung ist somit die Differenz zwischen der konstant anzusehenden Quellenspannung U_Q und dem inneren Spannungsfall $I \cdot R_i$; Funktionsgleichung der Klemmenspannung einer Stromquelle

$$U = U_Q - I R_i \quad (10)$$

Durch Umordnen entspricht die Gleichung (10) der linearen Funktionsgleichung (3):

$$U = -R_i \cdot I + U_Q \\ y = m \cdot x + n$$

Das Bild der funktionalen Abhängigkeit Klemmenspannung U von der Stromstärke I als Belastungsgröße (Bild 3) ist eine fallende Gerade $\rightarrow$ Steigungsfaktor $m \triangleq -R_i$, die auf der Ordinatenachse in positiver Richtung um U_Q verschoben ist $\rightarrow n \triangleq +U_Q$.

Bei einer zweiten Stromquelle mit einer kleineren Quellenspannung $U_{Q2} < U_{Q1}$ aber einem größeren Innenwiderstand $R_{i2} > R_{i1}$ im Vergleich zur ersten Stromquelle fällt die Gerade stärker ab. Die Geraden im Bild 3 werden als Belastungskennlinien der Stromquellen (1) und (2) bezeichnet. Bei gleichem Belastungsstrom I' ist der innere Spannungsfall $I' \cdot R_{i2}$ der zweiten Stromquelle größer als der der ersten.

Die Leistungsaufnahme eines Verbrauchsmittels kann berechnet werden nach:

$$P = U \cdot I \quad (10)$$

$$P = I_2 \cdot R \quad (11)$$

$$P = U^2/R \quad (12).$$

Bei konstanter Spannung U ist nach (10) die Leistung P eine lineare Funktion der Stromstärke $I \rightarrow P = f(I)$. Die Stromstärke kann dabei nur durch eine Widerstandsänderung erhöht oder verringert werden.

Bei konstantem Widerstandswert R ist nach der Gleichung (11) die Leistung P ebenfalls eine Funktion der Stromstärke I und nach (12) eine Funktion der anliegenden Spannung U . Beide Gleichungen sind Potenzfunktionen mit dem Exponenten $n = 2$, mithin quadratische Funktionen. Ihre Graphen sind Parabeln, deren Formen im Vergleich zur Einheitsparabel $y = x^2$ abweichen, da die y -Werte auf das A -fache wachsen: $y = A \cdot x^2$.

Der Verlauf ist bei

$$A > 1 \rightarrow P = I^2 \cdot R$$

$$A \triangleq R \text{ steiler und bei}$$

$$A < 1 \rightarrow P = U^2/R$$

$A \triangleq 1/R$ flacher, wenn $R > 1 \Omega$ ist (Bild 4).

Die negativen Werte der unabhängig Veränderlichen im Bild 4 bedeuten entgegengesetzte Richtung von Strom und Spannung im Vergleich zu den Plus-Werten. Unabhängig von der Strom- oder Spannungsrichtung sind deshalb die Leistungswerte im Gleichstromkreis stets positiv.

H. Spanneberg

Fortsetzung



LERNEN
& KÖNNEN

Funktionale Abhängigkeiten
im Wechselstromkreis