Bedeutung der Phasenlage von Wechselgrößen

Teil 2: Auswirkungen auf die Leistung

Bei Kontrollmessungen in einer Duoschaltung zweier Leuchtstofflampen gleicher Leistung wurden vom Messgerät dieselben Beträge sowohl der Zweigströme als auch des Gesamtstromes angezeigt. Gilt der Knotenpunktsatz nur für verzweigte Gleichstromkreise? Muss der Gesamtstrom nicht immer größer als einer der Teilströme sein?

Duoschaltung

Kehren wir zur Ausgangsproblematik in [1] zurück. Die Duoschaltung besteht aus zwei parallel geschalteten Lampenkreisen. Der eine wirkt durch das Vorschaltgerät induktiv, das heißt der Strom I_1 eilt um etwa 60° ($\cos\varphi \approx 0{,}5$) gegenüber der Netzspannung U nach. Im zweiten Kreis wird zum Vorschaltgerät ein Kondensator geschaltet, der so bemessen ist, dass der Strom I_2 gegenüber U um etwa 60° vorauseilt. Wie Bild ❻ zeigt, ist der Gesamtstrom (Effektivwert) als geometrische Summe $I_{ges} = I_1 \hat{+} I_2$ zu bestimmen. Gleiche Längen der Stromzeiger bedeutet: Der Betrag des Gesamtstromes ist gleich dem Betrag der Einzelströme. Weiterhin liegt der Gesamtstrom I_{ges} in Phase mit der Netzspannung U. Die Zuleitung zur Duoschaltung wird nur mit Wirkleistung belastet.

Phasenlage von Strom und Spannung

Der fließende Strom als Merkmal des Energietransportes im Stromkreis wird neben der antreibenden Spannung vor allem durch die passiven Bauelemente bestimmt. Ihr Widerstandswert bestimmt den Betrag der Stromstärke und ihre Art die Phasenlage von Strom und Spannung im Stromkreis. Tafel ❷ stellt die Unterschiede dar.

Leistung

Im Gleichstromkreis bestimmen Spannung U und Stromstärke I die Leistung:

$P = U \cdot I$.

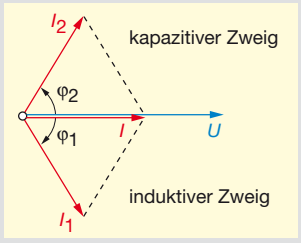
Auf die veränderlichen Größen des Wechselstromkreises bezogen heißt das:

Nur die zeitgleich auftretenden Augenblickswerte der Spannung und des Stromes ergeben einen Leistungswert. Dieser wird damit wieder eine zeitabhängige Größe, bestimmt durch die Leistungsgleichung der Augenblickswerte:

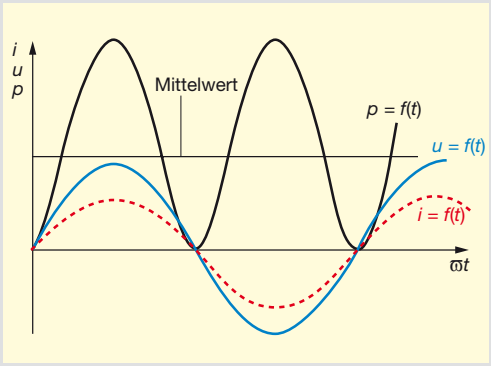
$p = u \cdot i$.

Diese Gleichung ist allgemeingültig, das heißt, sie gilt für alle Schaltelemente und für alle Kurvenformen.
Mit den vorstehenden Merkmalen der Schaltelemente (Tafel ❷) müssen drei Varianten untersucht werden.

1. Leistung bei Phasengleichheit von Strom und Spannung.
2. Leistung bei einer Phasenverschiebung von 90° zwischen Strom und Spannung.
3. Leistungen realer Schaltelemente.



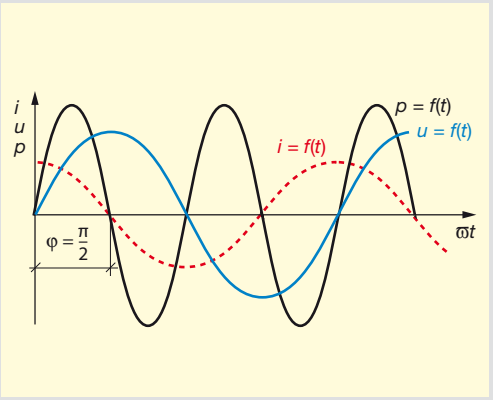
❻ Stromzeiger der Duoschaltung



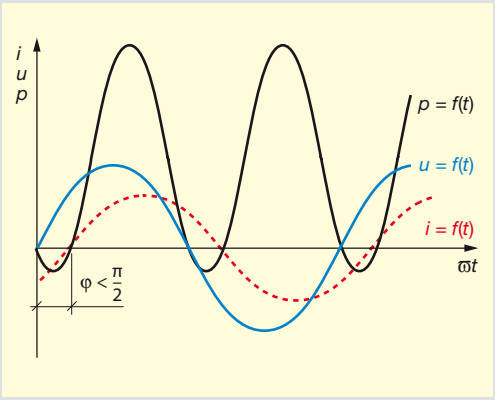
❼ Leistung bei Phasengleichheit von U und I ▶

Tafel ❷ Einordnung unterschiedlicher passiver Schaltelemente

Ideale Schaltelemente		werden durch Vereinfachung nur durch ihre dominierende Eigenschaft charakterisiert. Sie unterscheiden sich nach der Art der Energieumwandlung.
→	ohmscher Widerstand	ist frequenzunabhängig. Seine Eigenschaften im Stromkreis werden allein durch den Widerstand R beschrieben. Die elektrische Energie wird aufgenommen und gleichzeitig in Wärmeenergie oder mechanische Energie umgewandelt. Beide Energieformen treten aus dem Stromkreis aus. Strom und Spannung liegen in Phase: $\varphi = 0°$.
→	kapazitiver Blindwiderstand	ist frequenzabhängig. Seine Eigenschaften werden durch die Kapazität C und die Frequenz f bestimmt. Die elektrische Energie wird mit steigendem Spannungsbetrag kurzzeitig im elektrischen Feld gespeichert und bei abnehmendem Betrag wieder abgegeben. Die Energie pendelt zwischen Wechselstromquelle und idealem Kondensator hin und her. Der Strom eilt der Spannung um 90° voraus.
→	induktiver Blindwiderstand	ist frequenzabhängig. Seine Eigenschaften werden durch die Induktivität L und durch die Frequenz f beeinflusst. Mit steigendem Betrag der Stromstärke wird die elektrische Energie im magnetischen Feld gespeichert und mit abnehmendem Betrag wieder abgegeben. Die Energie pendelt zwischen Wechselstromquelle und idealer Spule hin und her. Der Strom eilt der Spannung um 90° nach.
Reale Schaltelemente		werden nicht nur durch ihre typische Eigenschaft sondern auch durch die weniger intensiven Merkmale beschrieben. Insbesondere wird die bei Stromfluss in den Schaltelementen entstehende Wärme (Verluste der realen Schaltelemente) berücksichtigt. Strom und Spannung sind phasenverschoben: $0° < \varphi < 90°$ Reale Schaltelemente werden als Zusammenschaltung von idealen Schaltelementen angesehen.
→	Reihenschaltungen	idealer Schaltelemente, z. B. reale Spule
→	Parallelschaltungen	idealer Schaltelemente, z. B. realer Kondensator



❽ Leistung bei einer Phasenverschiebung von 90° zwischen *U* und *I*



❾ Leistung des realen Schaltelementes

1. Phasengleichheit von Strom und Spannung

Wie aus Bild ❼ zu erkennen ist, ändert sich die Leistung sinusförmig, jedoch mit doppelter Frequenz wie die des Stromes bzw. die der Spannung. Die stets positiven Leistungswerte bedeuten gleichbleibende Richtung des Energieflusses. Die vorstehenden Merkmale des ohmschen Widerstandes werden bestätigt. Der Mittelwert des als Wirkleistung bezeichneten zeitbezogenen Energieflusses ist gleich ihrem halben Scheitelwert.

2. Phasenverschiebung von 90° zwischen Strom und Spannung

Sowohl am induktiven als auch am kapazitiven Grundschaltelement sind Strom und Spannung um 90° verschoben. Die Multiplikation von *u* und *i* (Bild ❽) ergibt wechselweise positive und negative Leistungswerte. Die Richtung des Energieflusses ändert sich somit periodisch.
Die zum Aufbau des elektrischen Feldes oder des magnetischen Feldes aufgewandte Energie wird beim Abbau der Felder restlos zurückgewonnen. Die Blindleistung pendelt zwischen Wechselstromquelle und Blindwiderstand hin und her. Der Mittelwert der Leistungsbeträge ist gleich null.

3. Reale Schaltelemente

Bei realen Schaltelementen sind Strom und Spannung auch phasenverschoben. Der Phasenverschiebungswinkel ist jedoch kleiner als 90°. Die Leistungskurve (Bild ❾) zeigt wieder den typischen sinusförmigen Verlauf. Sie ist nach oben verschoben. Der positive Anteil der Leistungswerte ist größer als der der negativen. Dem realen Schaltelement wird eine größere Energiemenge zugeführt als bei Abbau des elektrischen oder des magnetischen Feldes zur Stromquelle zurückströmt. Der Stromkreis wird deshalb mit Wirkleistung und mit Blindleistung belastet.
Folgende Überlegungen sollen zum mathematischen Zusammenhang zwischen Leistung und Phasenlage von Strom und Spannung führen.

Vorgabe der sinusförmigen Wechselspannung

$$u = \hat{u} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_{u0}\right) \rightarrow u = f(t)$$

Fließen des sinusförmigen Stromes bei Anschluss eines realen Schaltelementes

$$i = \hat{i} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_{i0}\right) \rightarrow i = f(t)$$

Entstehen der zeitabhängigen Leistung $p(t) = i(t) \cdot u(t)$

$$p(t) = \hat{i} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_{i0}\right) \cdot \hat{u} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_{u0}\right)$$

Umformen der Leistungsgleichung mit dem für Produkte der Winkelfunktionen zutreffenden Additionstheorem

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha - \beta\right) - \cos\left(\alpha + \beta\right)\right]$$

mit $\alpha = \omega t + \varphi_{i0}$ und $\beta = \omega t + \varphi_{u0}$ wird

$$p(t) = \frac{\hat{i} \cdot \hat{u}}{2}\left[\begin{array}{l}\cos\left(\omega t + \varphi_{i0} - \omega t - \varphi_{u0}\right) \\ -\cos\left(\omega t + \varphi_{i0} + \omega t + \varphi_{u0}\right)\end{array}\right]$$

Berücksichtigung der Effektivwerte von Spannung und Strom

$$\frac{\hat{i} \cdot \hat{u}}{2} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = U \cdot I$$

Zeitabhängige Leistung

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos\left(\varphi_{i0} - \varphi_{u0}\right) - U \cdot I \cdot \cos\left(2\omega t + \varphi_{i0} + \varphi_{u0}\right)$$

mit der zeitunabhängigen Leistungsgröße

$$U \cdot I \cdot \cos\left(\varphi_{i0} - \varphi_{u0}\right)$$

und er sich mit doppelter Frequenz ($2 \cdot t$) ändernden Leistungsgröße

$$U \cdot I \cdot \cos\left(2\omega t + \varphi_{i0} + \varphi_{u0}\right).$$

Aus der analytischen und grafischen Lösung (Bild ❾) erkennt man, dass die Funktion $p = f(t)$

- eine mit doppelter Frequenz von Strom und Spannung schwankende Wechselstromleistung ist, deren Amplitude nicht von der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung beeinflusst wird, aber
- deren Nulllinie von der Abszissenachse $p = 0$ um den von der Phasenverschiebung $\varphi = \varphi_{i0} - \varphi_{u0}$ abhängigen Betrag $U \cdot I \cdot \cos\left(\varphi_{i0} - \varphi_{u0}\right)$ verschoben ist.

Fazit

Sowohl die nach dem Maschensatz entstehende Gesamtspannung als auch der nach dem Knotenpunktsatz fließende Gesamtstrom ist von der Phasenverschiebung zwischen den Einzelgrößen abhängig. Die Effektivwerte der Gesamtgrößen haben ihren maximalen Betrag nur bei Phasengleichheit der Einzelgrößen. Ebenso ist die Leistungsbilanz im Wechselstromkreis optimal, wenn Phasengleichheit bzw. eine geringe Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung besteht.

Literatur

[1] *Spanneberg, H.*: Bedeutung der Phasenlage von Wechselgrößen; Teil 1: Kenngrößen von Spannungen und Strömen. Elektropraktiker Berlin 63(2009)8, Lernen und Können S. 1–3.

H. Spanneberg

Fortsetzung ep LERNEN & KÖNNEN

Verlustbehaftete Spulen und Kondensatoren im Wechselstromkreis