

# Einführung in die Simulation zeitabhängiger Vorgänge

## Anwendung mathematischer Grundlagen anhand bekannter Vorgänge

W. Mierke, Panitzsch

**Moderne Computer und fortgeschrittene mathematische Methoden erlauben es immer besser, technische Vorgänge zu modellieren und deren Verlauf anzugeben, ohne sie wirklich ablaufen zu lassen. So können teure Irrtümer bei technischen Entwicklungen vermieden und Gefahren bei Experimenten mit realer Technik eingegrenzt werden. [1] Befasste sich mit den dazu notwendigen mathematischen Grundlagen und dem Einschalt-Verhalten eines Kondensators. In diesem Beitrag werden die Grundlagen an den Beispielen Einschalten eines Transformators und eines Schützes angewandt.**

### 1 Einschalten eines Transformators im Leerlauf

Das Anschalten eines Transformators (größerer Leistung) an das Netz bereitet dem Elektrotechniker seit jeher Schwierigkeiten. Er beobachtet einen Einschalt-Stromstoß, der über zu erwartende lineare Übergangsvorgänge weit hinausgeht und zum Ansprechen der Schutz-einrichtungen führen kann. Für die Analyse dieses Phänomens mit Hilfe der Simulation werden einige Größen am Transformator definiert, wobei sich die Betrachtungen an dieser Stelle auf einen leerlaufenden Einphasentransformator beschränken (Bild 1). Wenn zum Zeitpunkt  $t = 0$  der Schalter schließt, liegt die Wechselspannung  $U_{\text{Netz}}$  mit der Frequenz

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (1)$$

mit  $f = 50$  Hz über der Primärwicklung des Transformators (siehe Bild 1). Der sich ausbildende Strom  $i$  wird im Magnetkreis des Transformators einen magnetischen Fluss  $\Phi$  erzeugen. Dessen Größe wird durch die Magnetisierungskurve des Eisens und die Windungszahl festgelegt. Um den Zusammenhang für die Simulation einfach handhabbar zu machen, wird die tatsächliche Magnetisierungskurve (Bild 2) durch Geradenstücke angenähert (Bild 3). Der vorliegenden Untersuchung liegt ein ausgeführter Transformator zugrunde. Die gemessenen bzw. angegebenen Kennwerte des Transformators sind in Tafel 1 zusammengefasst. In den Wicklungen (hier interessiert nur die Primärwicklung) wird eine Spannung entsprechend des Induktionsgesetzes induziert.

$$u_{\text{ind}} = w \frac{d\Phi}{dt} \quad (2)$$

Außerdem ist für den Primärkreis eine Maschengleichung aufzustellen:

$$U_{\text{Netz}} = \hat{U} \sin(\Omega \cdot t) = iR + u_{\text{ind}} \quad (3)$$

Dabei ist  $R$  der ohmsche Widerstand der Wicklung.

Im betrachteten System gibt es nur einen Energiespeicher, den Magnetkreis des Transformators. Wird der in Bild 3 gezeigte Zusammenhang mit

$$i = f_m(\Phi) \quad (4)$$

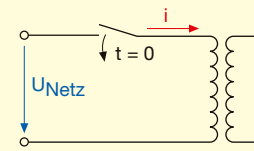
gekennzeichnet, so kann die Zustandsgleichung mit der Zustandsgröße  $q = \Phi$  geschrieben werden.

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{u_{\text{ind}}}{w} \\ &= \frac{\hat{U} \sin(\omega \cdot t) - iR}{w} \\ &= \frac{\hat{U} \sin(\omega \cdot t) - R f_m(\Phi)}{w} \end{aligned} \quad (5)$$

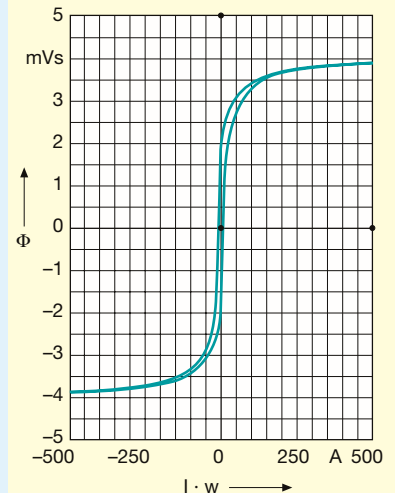
Damit kann die Simulation ausgeführt werden. Es wird angemerkt, dass es hierbei insbesondere auf das richtige Einfügen der Funktion  $f_m$  in das Simulationsprogramm ankommt. Die Ergebnisse werden folgend im Vergleich mit entsprechenden Messergebnissen dargestellt.

#### 1.1 Einschalt-Vorgang

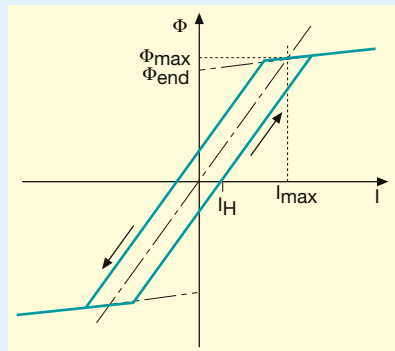
Beim Einschalten des Transformators ist der magnetische Fluss sehr klein. Deshalb vollzieht sich ein Übergangsvorgang, bei dem das Eisen zunächst einseitig magnetisiert wird. Der magnetische Kreis des Transformators gerät in den Sättigungsbereich, der Strom steigt auf Werte wesentlich über dem normalen Leerlaufstrom an, um trotz Sättigung die für den Fluss erforderliche Durchflutung aufzubringen. Dieser große Strom führt allerdings auch zu großen Stromwärme-Verlusten und klingt deshalb recht schnell ab. Der linear bedingte Einschaltvorgang von Strom und Fluss



### 1 Größen am Transformator



### 2 Magnetisierungskurve gemessen



### 3 Angenäherte Magnetisierungskurve

**Tafel 1 Mess- und Kennwerte des untersuchten Transformators**

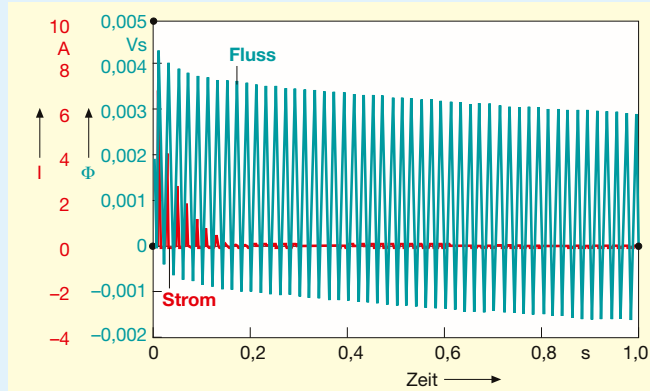
| Größe                  | Symbol              | Wert        |
|------------------------|---------------------|-------------|
| Nennstrom (primär)     | $I_N$               | 1,2 A       |
| Windungszahl           | $w$                 | 586         |
| Wicklungswiderstand    | $R$                 | 14 $\Omega$ |
| Hysteresebreite        | $i_H$               | 10 A        |
| Sättigungsdurchflutung | $i_{\text{max}}$    | 45 A        |
| Sättigungsfluss        | $\Phi_{\text{max}}$ | 3,7 mVs     |
| Flussverlängerung      | $\Phi_{\text{end}}$ | 3,69 mVs    |
| Nennspannung           | $U_N$               | 220 V       |
| Nennfrequenz           | $f_N$               | 50 Hz       |

klingt demgegenüber langsam ab, wie das in der Darstellung Bild 4 erkennbar wird.

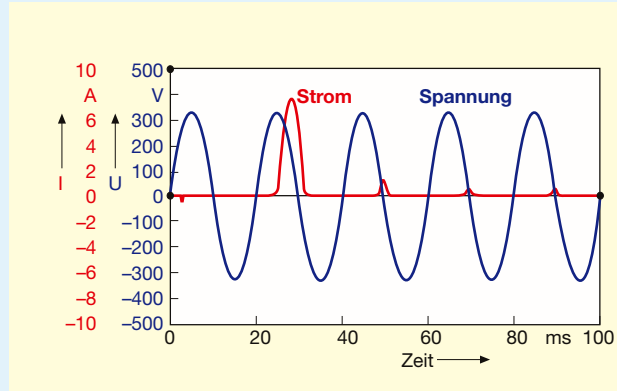
Da es sich hier um einen Transformator kleiner Leistung handelt, sind die Auswirkungen der Stromüberhöhung beim Einschalten unbedeutend. Bei Transformatoren großer Leistung kann diese gefährliche Werte annehmen und über mehrere Sekunden andauern.

#### Autor

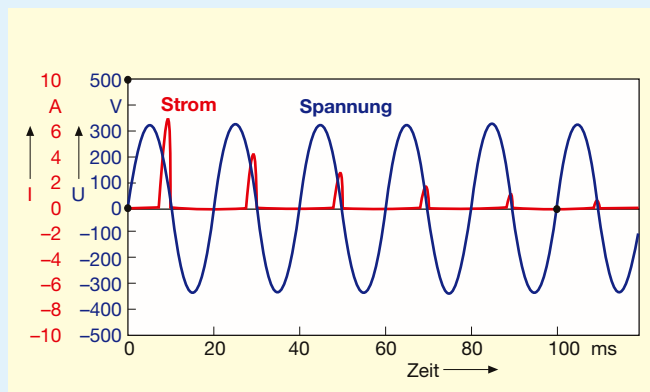
Prof. Dr.-Ing. habil. Wilfried Mierke ist freier Fachautor, Panitzsch.



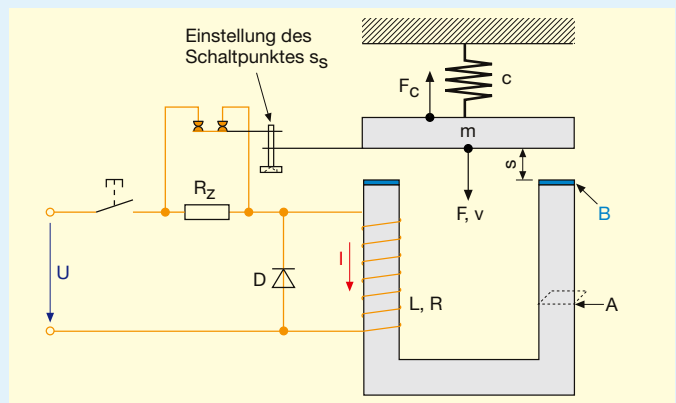
4 Einschaltvorgang von Strom und Fluss (Simulation)



6 Stromüberhöhung beim Einschalten des Trafos (Messung)



5 Stromüberhöhung beim Einschalten des Transformators (Simulation)



7 Prinzip des Schütz

Bei der vorgenommenen Simulation und der Messung wurde der ungünstigste Fall angenommen. Dieser tritt auf, wenn im Nulldurchgang der Spannung eingeschaltet wird (Bilder 5 und 6). Die Sättigung des Eisens kann auch durch eine Überspannung hervorgerufen werden und auch zu einer Verzerrung des Magnetisierungsstromes führen. Sie tritt dann in der Umgebung des Spannungs-Nulldurchganges auf, wenn der Fluss am größten ist.

## 2 Vorgänge an einem Schütz

### 2.1 Zustandsgleichungen

Das Schütz ist ein häufig gebrauchtes elektromechanisches Bauelement. Für die Simulation des Ein- und Ausschaltvorganges wird eine gleichstrombetätigte Ausführung zugrunde gelegt.

Bild 7 zeigt das Wirkprinzip, das Kontaktsystem wurde dabei nur mit einem Öffner berücksichtigt, der den Vorwiderstand abschaltet. Bei einem Gleichstromschütz ist dieser erforderlich, da einerseits für das Anziehen ein hoher Strom erforderlich ist, andererseits die Erregerwicklung nach erfolgtem Anzug nicht zu starker Erwärmung ausgesetzt werden soll. Im Übrigen wurde die Anordnung konstruktiv vereinfacht.

Beim Schütz sind drei Energiespeicher zu berücksichtigen: die Feder mit ihrer potentiellen Energie (abhängig von der Luftspallänge

$s$ ), die Masse mit ihrer kinetischen Energie (abhängig von der Geschwindigkeit  $v$  des Ankers) und die Induktivität der Spule mit der magnetischen Energie (abhängig vom Spulenstrom  $I$ ). Entsprechend wird es drei Zustandsgößen geben.

$$\begin{aligned} q_1 &= I \\ q_2 &= v \\ q_3 &= s \end{aligned} \quad (6)$$

Nach dem Schließen des Schalters wird die Spule vom Strom  $I$  durchflossen und erregt. Der Widerstand  $R_z$  ist noch kurzgeschlossen. Eine Spannung an der Spule führt zur Änderung des Stromes  $I$ . Ist  $L$  die Induktivität der Spule und  $R$  der Wicklungswiderstand, so folgt  $I$  der Differentialgleichung, die gleichzeitig die erste Zustandsgleichung ist.

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{U - IR}{L} \quad (7)$$

Wenn der Widerstand  $R_z$  durch den Öffner wirksam geworden ist, gilt die folgende Gleichung:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{U - I(R + R_z)}{L} \quad (8)$$

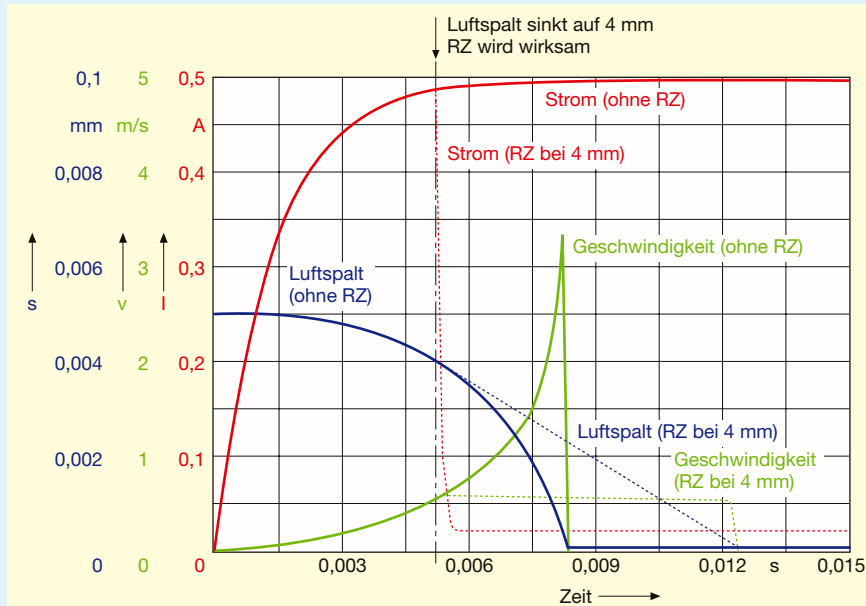
Der Strom bringt ein magnetisches Feld hervor. Dessen Kraftwirkung bewegt den Anker gegen die Federkraft, so dass sich der Luftspalt  $s$  verringert.

Bei dem Betrachten der Ausführung ist ersichtlich, dass der Luftspalt nach unten durch eine nicht magnetische Zwischenlage  $B$  (Bild 7) begrenzt wurde, die das „Kleben“ des Ankers

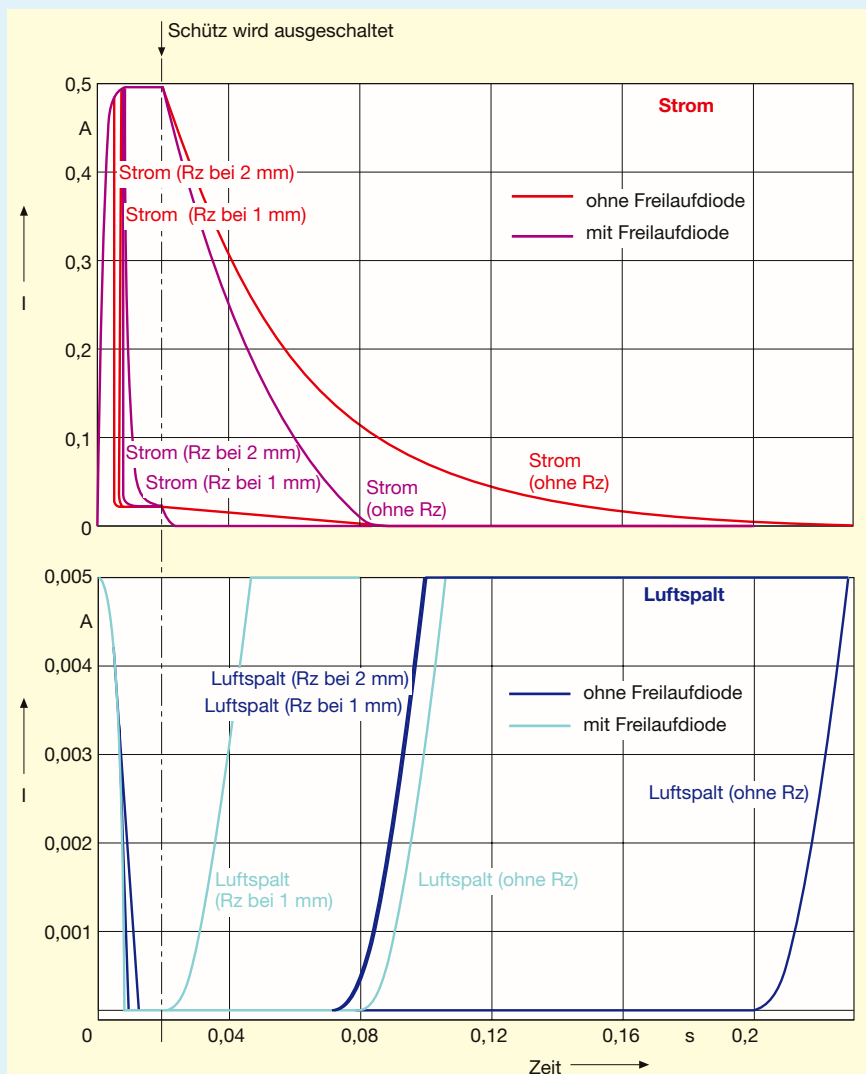
durch die Remanenz des Eisens beim Ausschalten des Stromes verhindert und das Abfallen beschleunigt. Es ist zu beachten, dass sich die Induktivität  $L$  mit der Größe des Luftspaltes verändert. Die Induktivität kann näherungsweise bei der vorliegenden Anordnung leicht bestimmt werden, dazu wird das magnetische Feld als homogen angenähert, Streufelder und die nichtlineare Kennlinie des Eisens werden hier vernachlässigt.

Die Länge des Luftspaltes beträgt  $2s$ . Die mittlere Länge des Eisenkreises wird mit  $SE$  bezeichnet. Der magnetische Widerstand  $R_m$  der Anordnung wird nach folgender Gleichung berechnet.

Anzeige



### 8 Anzugsvorgang mit und ohne Zusatzwiderstand



### 9 Anzug bei $t = 0$ und Abfall bei $t = 20$ ms

$$R_m = \frac{SE}{\mu_{rel}} + 2s \quad (9)$$

Hierbei ist  $A$  der Querschnitt des Magnetkreises,  $\mu_{rel}$  die relative Permeabilität des Eisens und  $\mu_0$  die Permeabilität im Vakuum mit  $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$  Vs/Am. Wenn die Windungszahl  $w$  ist, gilt für den magnetischen Fluss  $\Phi$

$$\Phi = \frac{I \cdot w}{R_m} \quad (10)$$

und

$$L = w \frac{\Phi}{I} = \frac{w^2}{R_m} \quad (11)$$

Von den erforderlichen drei Zustandsgleichungen bilden Gleichung (7) bzw. Gleichung (8) bereits eine. Zustandsgröße ist dabei der Strom  $I$ . Für die nächste Zustandsgleichung, deren Zustandsgröße den Inhalt an kinetischer Energie beschreibt, müssen zunächst die magnetische Kraft  $F$  und die Federkraft  $F_c$  bestimmt werden.

Für die vorliegende Anordnung kann die folgende Gleichung für  $F$  Tabellenbüchern entnommen werden.

$$F = \frac{\Phi^2}{A\mu_0} = \frac{(I \cdot w)^2}{R_m^2 \cdot A \cdot \mu_0} \quad (12)$$

Die Federkraft wird aus dem Federweg  $s$  und der Federkonstanten  $c$  ermittelt:

$$F_c = c \cdot (s_0 - s) \quad (13)$$

Als Zustandsgröße für die Beschreibung des Inhaltes an kinetischer Energie wird die Geschwindigkeit des Ankers  $q_2 = v$  gewählt. Das Aufstellen der zugehörigen Zustandsgleichung (Gl. 14) ist an die Festlegung geknüpft, dass die Geschwindigkeit des Ankers in Richtung der Verkleinerung des Luftspaltes ein positives Vorzeichen erhält.  $s_0$  ist die Luftspalllänge in der Ruhelage. Für  $s = s_0$  ist die Federkraft  $F_c = 0$ . Die Änderung der Geschwindigkeit  $dv/dt$  wird auch als Beschleunigung bezeichnet.

Da sich die Kraft, hier die Differenz von magnetischer Kraft  $F$  und Federkraft  $F_c$ , aus dem Produkt von Masse des Ankers  $m$  und Beschleunigung  $dv/dt$  bestimmt, ergibt sich die folgende Zustandsgleichung (Gl. 14)

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{F - F_c}{m} \quad (14)$$

Die durch die Kontakte verursachten Kräfte werden vernachlässigt. Die letzte Zustandsgleichung (Gl. 15) ist durch die Zustandsgröße  $q_3 = s$ , die Luftspalllänge, gekennzeichnet, die die potentielle Energie der Feder beschreibt. Die Änderung der Luftspalllänge ist die negative Geschwindigkeit.

$$\frac{dq_3}{dt} = \frac{ds}{dt} = -v \quad (15)$$

## 2.2 Schwingungsvorgänge am Anker

Die bisher dargestellten Zustandsgleichungen berücksichtigen nicht, dass der Anker sich nicht beliebig bewegen kann. Beim Anzugsvorgang trifft er auf die Zwischenlage *B* nach Bild 7. Beim Abfallvorgang wird es einen oben liegenden Anschlag geben. Wird dies nicht berücksichtigt, würde die Simulation als Ergebnis jeweils Schwingungen zeigen, wie das bei ungedämpften Feder-Masse-Anordnungen der Fall ist.

Die Anschläge werden als gummielastische Puffer angenommen, die die kinetische Aufprall-Energie vernichten (in Wärme umwandeln) und so Schwingungen vermeiden. In der Simulation wird dies durch eine Zusatzkraft  $F_z$  in Gl. 14 berücksichtigt, die beim unteren Anschlag wirkt, wenn  $s < B$  und  $q_2 = v > 0$  gilt, d. h. wenn die Zwischenlage *B* bereits gedrückt wird und die Bewegung noch nach unten erfolgt. Am oberen Anschlag wirkt diese Zusatzkraft entsprechend, wenn  $s > s_0$  und  $v < 0$ , d. h. wenn der Anker die Ruhelage nach oben überschritten hat und die Bewegung noch nach oben erfolgt. Für die Zusatzkraft wurden die folgenden Gleichungen angesetzt. Gleichung 16 für den oberen Anschlag und Gleichung 17 für den unteren.

$$F_z = -c_1 \cdot \frac{1}{s} \quad (16)$$

$$F_z = c_1 \cdot \frac{1}{s_0 + 0,0005 - s} \quad (17)$$

Dies bewirkt, dass die Zusatzkraft nach der Berührung der Zwischenlage bzw. nach Überschreiten des oberen Endpunktes progressiv stark ansteigt und der Anker jeweils entsprechend stark gebremst wird, sodass er am Anschlag zum Stillstand kommt.

## 2.3 Anzugs- und Abfallvorganges

Die oben entwickelten Gleichungen wurden unter Verwendung folgender Parameter mit der Programmiersprache C++ notiert:

- $s_0 = 5 \text{ mm}$
- $R_z = 10 \text{ k}\Omega$
- $A = 2 \text{ cm}^2$
- $R = 440 \Omega$
- $w = 5000$
- $U = 220 \text{ V}$
- $SE = 15 \text{ cm}$
- $B = 0,1 \text{ mm}$
- $c = 400 \text{ N/m}$
- $m = 0,1 \text{ kg}$
- $\mu_{\text{rel}} = 1000$

Um die Simulation durchzuführen, wird für jede Zustandsgröße ein Anfangswert festgelegt.

$$\begin{aligned} q_{10} &= I_0 = 0 \\ q_{20} &= v_0 = 0 \\ q_{30} &= s_0 = 0,005 \text{ m} \end{aligned} \quad (18)$$

Bild 8 zeigt zunächst den Anzugsvorgang, einmal mit ständig kurzgeschlossenem Zusatzwiderstand  $R_z$  (dicke Linie), einmal mit Aufheben des Kurzschlusses, wenn die Luftspaltlänge *s* nur noch 4 mm beträgt (dünne Linie).

Auf Grund der Induktivität *L* der Spule steigt der Spulenstrom *I* (rote Kurve) nach einer Exponentialfunktion an. Entsprechend erhöht sich die Kraft *F*, die Masse *m* des Ankers wird beschleunigt und damit steigt die Geschwin-

digkeit *v* (blaue Kurve). Der Luftspalt *s* (grüne Kurve) verringert sich. Wenn der Anker an die Zwischenlage *B* anschlägt, wird die Geschwindigkeit  $v = 0$  und der Vorgang ist hier nach etwa 8,3 ms bzw. 13 ms beendet. Das Zuschalten des Zusatzwiderstandes  $R_z$  durch Aufheben des Kurzschlusses hat folgende Wirkungen:

Der Spulenstrom *I* verringert sich von 0,5 A auf 0,022 A. Dies ist der Hauptvorteil, die Schützspule braucht nur für den kleineren Dauerstrom ausgelegt zu werden. Es wird erheblich am Volumen für die Wicklung gespart.

Der gesamte Anzugsvorgang verzögert sich. Das Maß der Verzögerung ist meist unerheblich, der Nachteil ist gering.

Die Geschwindigkeit beim Anschlag des Ankers ist geringer.

An diesem Beispiel kann der Nutzen einer solchen Simulation erläutert werden. Es ist mit wenig Aufwand möglich, die Parameter der Anordnung, z. B. der Windungszahl *w* oder Schalterpunkt des Zusatzwiderstandes  $s_s$ , zu verändern und dann die Simulation erneut durchzuführen. So können die Parameter optimiert werden, ohne aufwändige Experimente mit der realen Anordnung durchführen zu müssen.

In der Simulation findet das Abschalten des Schützes nach  $t = 20 \text{ ms}$  statt (Bild 9). Der Verlauf ist einerseits vom Schalterpunkt  $s_s$  für den Zusatzwiderstand abhängig, andererseits davon, ob die Freilaufdiode *D* verwendet oder weggelassen wird (Bild 7).

Die Freilaufdiode gewährleistet, dass der Spulenstrom *I* getrieben durch die magnetische Energie der Spule nach dem Abschalten der Spannung sofort weiter fließen kann, ohne eine Schaltüberspannung zu verursachen. Steuert eine elektronische Einrichtung, z. B. eine SPS, das Schütz an, ist das Verwenden einer Freilaufdiode unumgänglich. Wird sie weggelassen, entsteht an dem Kontakt der die Spule schaltet ein Lichtbogen. Dessen Ursache ist eine Überspannung, hervorgerufen durch die magnetische Energie der Schützspule. Damit wird der Spulenstrom aufrecht erhalten. Durch den Energiebedarf des Lichtbogens, sinkt der Strom schneller als mit Freilaufdiode, die Abschaltzeit des Schützes verringert sich. Für die Simulation wurde ein Spannungsfall von 60 V über dem Lichtbogen angenommen.

Da der Spulenstrom zum Abschaltzeitpunkt kleiner ist, wenn ein Zusatzwiderstand  $R_z$  wirksam war, ist die Abschaltzeit in diesem Fall auch kleiner. Der Schalterpunkt  $s_s$  hat demgegenüber nur wenig Einfluss. Es wurde nach Bild 7 angenommen, dass der Schalterpunkt  $s_s$  des Öffners einstellbar sein soll.

## Literatur

- [1] Mierke, W.: Einführung in die Simulation zeitabhängiger Vorgänge, Grundlagen am Beispiel: Aufladen eines Kondensators, Berlin, Elektrotechniker 59 (2005) 03, S. 211-213
- [2] Wunsch, G., Schreiber, H.: Analoge Systeme, Grundlagen, Berlin, Verlag Technik 1988.