

Einführung in die Simulation zeitabhängiger Vorgänge

Grundlagen am Beispiel: Aufladen eines Kondensators

W. Mierke, Panitzsch

Moderne Computertechnik und fortgeschrittene mathematische Methoden erlauben es immer besser, technische Vorgänge zu modellieren und so ihren Verlauf anzugeben, ohne sie wirklich ablaufen zu lassen. Anhand von beobachteten Vorgängen konnten die Ergebnisse mit der Realität verglichen und die Modelle qualifiziert werden. In der Folge ist es möglich, teure Irrtümer bei neuen technischen Entwicklungen vorab durch Untersuchungen mit Computermodellen zu vermeiden und Gefahren bei Experimenten mit realer Technik einzugrenzen.

1 Das Modellieren

Um einen Prozess zu modellieren, muss es nur möglich sein, diesen mathematisch hinreichend genau zu beschreiben. Für die Lösung solcher Aufgaben gibt es zahlreiche Simulationsprogramme, bei denen die Eingabe von Strukturen des Systems und von Parametern ausreicht, um dann einen Simulationslauf durchzuführen. Solche Programme werden vor allem für den technischen Bereich angeboten (z. B. [4]). Sie sind jeweils auf eine bestimmte Aufgabenklasse beschränkt.

2 Mathematische Grundlagen

2.1 Definitionen

Wer sich mit dem Modellieren von Systemen, auch als Simulation bezeichnet, beschäftigen möchte oder wer die Ergebnisse von Simulationen nachvollziehen und kritisch werten will, muss sich die erforderlichen mathematischen Hilfsmittel aneignen. Diese sollen in erforderlichem Umfang dargestellt werden, ohne die Details herzuleiten oder beweisen zu wollen. Simulation ist im engeren Sinne ein Verfahren zur Durchführung von Experimenten mit einem mathematischen Modell (unter Benutzung eines Computers), das Erkenntnisse und Aussagen über das Verhalten des simulierten realen Systems zum Ziel hat [1]. Die Simulation wird insbesondere bei umfangreichen komplizierten Systemen verwendet, bei denen die Anwendung direkter mathematischer Verfahren versagt oder zu aufwendig ist. Wenn wir hier dennoch die Simulation auf einfache Probleme anwenden, geschieht das zum Zwecke der verständlicheren Einführung in die Metho-

dik. Vor Beginn dieser Betrachtungen sollen die zwei Begriffe „System“ und „Prozess“ definiert werden, die in der Einführung bereits benutzt wurden. Sie werden von verschiedenen Autoren unterschiedlich definiert und sind in den verschiedenen Wissensgebieten mit abweichenden Inhalten im Gebrauch.

In sehr kurzer Form wird in [2] ein System als eine „Menge von Objekten, die sich gegenseitig auf ein gemeinsames Ziel hin beeinflussen“ gekennzeichnet. Diese Definition beinhaltet sowohl das Strukturieren eines Systems in Teilsysteme und Elemente als auch die Abhängigkeit dieser voneinander. Als Elemente werden die Bestandteile des Systems bezeichnet, die nicht weiter strukturiert sind oder genauer, die für die vorliegende Aufgabe nicht weiter zu strukturiert werden brauchen. Systeme, in denen von der Zeit abhängige Vorgänge ablaufen, werden als dynamische bezeichnet. Im Gegensatz zu stationären, in denen alle Größen konstant bleiben. An dieser Stelle sollen ausschließlich dynamische Systeme betrachtet werden. Eine Ausnahme besteht darin, dass ein dynamisches in einen stationären Endzustand übergehen kann und damit zu einem stationären wird. Die Gesamtheit der im System ablaufenden zeitabhängigen Vorgänge wird als Prozess bezeichnet. Das stimmt mit dem Gebrauch dieses Begriffes in den meisten Wissensgebieten überein. In [3] wird z. B. der Prozess als „qualitative oder quantitative Veränderungen in Abhängigkeit von der Zeit“ bezeichnet. Es soll zugelassen werden, dass der Prozess in Teilprozesse gegliedert ist. Weiterhin soll die Beeinflussung des Prozesses von außen und die Einflussnahme des betrachteten Prozesses auf Systeme außerhalb des betrachteten möglich sein.

2.2 Zustandsgrößen

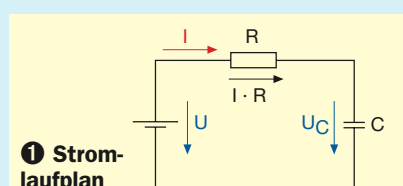
Um einen Prozess zu beschreiben, sind zeitabhängige Prozessgrößen zu definieren, die den momentanen Zustand des Prozesses kennzeichnen. Für die Beschreibung des momenta-

nen (und damit zeitabhängigen) Prozesszustandes eignen sich nur Größen, die in dem den Prozess tragenden System selbst verankert sind. Es handelt sich um Größen die den Bestand der Ressourcen des Systems (Energieinhalt, Mengenbestand von Stoffen, digital verschlüsselter Inhalt von Variablen im Computer) beschreiben. Solche Größen werden als Zustandsgrößen q bezeichnet.

Der Zustand eines Pendels ist durch den Füllstand der beiden Energiespeicher, des Speichers der kinetischen Energie und des Speichers der potenziellen Energie gekennzeichnet. Es sind zwei Zustandsgrößen zur Beschreibung notwendig. Der Prozess der Erwärmung des Wassers im Kessel eines Kraftwerkes lässt sich beschreiben, indem die Temperatur als Zustandsgröße gewählt wird, die den Inhalt an Wärmeenergie beschreibt. Bei verfahrenstechnischen Systemen kommen die Bestände der einzelnen Reaktionskomponenten als Zustandsgrößen in Frage. Bei der Simulation von digitalen Reglern sind Inhalte der Arbeitsspeicher Zustandsgrößen. Die Anzahl der vorhandenen oder in die Untersuchung einzubeziehenden Speicher (für Energie, Stoff, Anzahl) ist gleich der Anzahl der zu verwendenden Zustandsgrößen, da jeder Speicher durch genau eine Zustandsgröße beschrieben werden soll. Die Anzahl der verwendeten Zustandsgrößen ist die Ordnung des Systems. Werden bestimmte Zustandsgrößen als für den Prozess unwesentlich erkannt und vernachlässigt, wird die Ordnung des Systems reduziert. Das führt allgemein zu einer besseren Durchführbarkeit der Simulation (weniger Gleichungen, geringere Anforderungen an den Computer, geringerer Zeitbedarf). Die Gesamtheit der Zustandsgrößen bestimmt den Fortgang des Prozesses aus dem Inneren des Systems heraus.

2.3 Eingangsgrößen

Es ist zu berücksichtigen, dass die meisten Systeme nicht abgeschlossen sind. Das heißt, sie werden durch außerhalb des betrachteten Systems verursachte Größen beeinflusst. Solche Größen werden als Eingangsgrößen bezeichnet. Es sei erwähnt, dass die Definition von Eingangsgrößen es auch erlaubt, das betrachtete Problem zu begrenzen und damit überschaubarer zu machen. Bestimmte Teilprozesse können von der Simulation dadurch ausgeschlossen werden, dass man ihre bekannten Wirkungen als (möglicherweise zeitlich veränderliche) Eingangsgrößen dem Prozess aufschaltet.

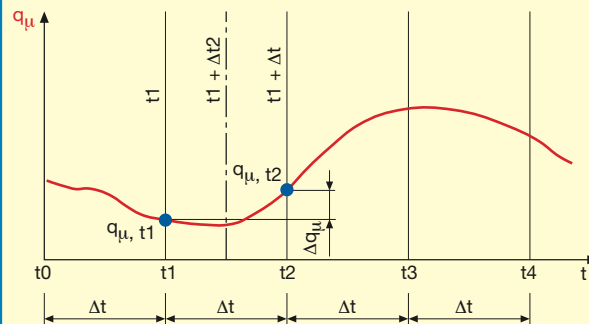


Autor

Prof. Dr.-Ing. habil. Wilfried Mierke ist freier Fachautor, Panitzsch.

Tafel 1 Runge-Kutta-Verfahren

Beim Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung werden die Änderungen aller Zustandsgrößen $\Delta \vec{q}$ und die sich daraus ergebenden aktualisierten Zustandsgrößen $\vec{q}$ vier Mal berechnet, ein Mal zum Beginn des Simulationsintervalls, zur Zeit t_1 , zwei Mal in der Mitte des Intervalls ($t_1 + \Delta t/2$) und noch ein Mal am Ende des Intervalls ($t_1 + \Delta t$).

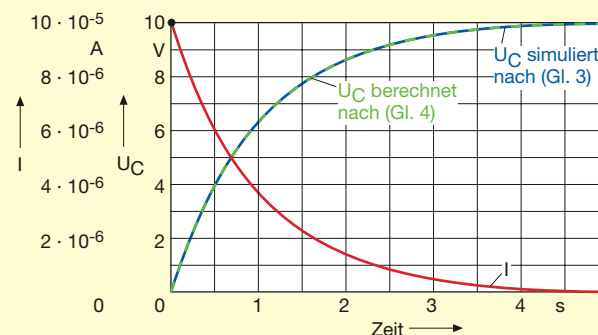


Die folgenden Schritte werden nacheinander ausgeführt:

$$\begin{aligned} \vec{q}_a &= \vec{q}(t_1) \\ \vec{q}_b &= \vec{q}(t_1) + \Delta \vec{q} \cdot \frac{\Delta t}{2}; \quad \Delta \vec{q} \text{ aus } \vec{q}_b \text{ berechnet} \\ \vec{q}_c &= \vec{q}(t_1) + \Delta \vec{q} \cdot \frac{\Delta t}{2}; \quad \Delta \vec{q} \text{ aus } \vec{q}_b \text{ berechnet} \\ \vec{q}_d &= \vec{q}(t_1) + \Delta \vec{q} \cdot \Delta t; \quad \Delta \vec{q} \text{ aus } \vec{q}_c \text{ berechnet} \end{aligned}$$

Nachfolgend wird der neue Wert von $\vec{q}$ berechnet:

$$\vec{q}_{t2} = \vec{q}_{t1} + \frac{\Delta t}{6} (\vec{q}_a + 2\vec{q}_b + 2\vec{q}_c + \vec{q}_d)$$



2 Aufladevorgang eines Kondensators

3 Aufladen eines Kondensators

Als Beispiel soll die Aufladung eines Kondensators nach Bild 1 an einer konstanten Gleichspannung über einen Widerstand benutzt werden. Es wird zunächst festgestellt, dass die Schaltung nur einen einzigen Energiespeicher enthält, den Kondensator C. Demzufolge gibt es nur eine einzige Zustandsgröße, die den Energieinhalt des Kondensators beschreibt, die Kondensatorspannung $q = U_C$. Es gibt auch nur eine Eingangsgröße, die Gleichspannung U .

3.1 Zustandsgleichungen

Die Eingangsgrößen gelten bei der Simulation als vorgegeben. Die Zustandsgrößen werden sich unter dem Einfluss der Eingangsgrößen

und der Zustandsgrößen selbst verändern. Das schrittweise Berechnen der Änderung der Zustandsgrößen ist die zentrale Methode der digitalen Simulation von zeitabhängigen Prozessen. Sie besteht darin, die Änderung der Zustandsgröße Δq in einem bestimmten kleinen Zeitintervall Δt zu ermitteln. Wird Δq zur bisherigen Zustandsgröße $q = U_C$ addiert, erhält man den Wert der Zustandsgröße am Ende des Zeitintervalls. Im nächsten Zeitintervall wird dieser Vorgang wiederholt. So kann schrittweise der Verlauf einer Zustandsgröße ermittelt werden.

$$U_{C_{n+1}} = U_{C_n} + \Delta U_C \quad (1)$$

Dies wird als „schrittweise Integration“ bezeichnet. Die Änderung der Kondensatorspannung ist von der Kapazität C und vom Strom I abhängig.

$$\Delta U_C = \Delta t \frac{I}{C}$$

$$I = \frac{U - U_C}{R} \quad (2)$$

$$\Delta U_C = \Delta t \frac{1}{R \cdot C} (U - U_C)$$

Um schrittweise die Berechnung des Verlaufs der Zustandsgröße vornehmen zu können, ist noch die Angabe eines Anfangswertes erforderlich, zu dem die erste Änderung addiert werden soll.

3.2 Tabellen-Kalkulationsprogramm

Bei einem wenig komplexen Fall wie der Aufladung eines Kondensators ist es möglich, die Berechnungen mit einem üblichen Tabellen-Kalkulationsprogramm (z. B. Excel oder StarCalc) durchzuführen. In die Spalte A einer Tabelle wird die Zeit eingetragen, in Zeile 1 mit 0 beginnend und dann in den weiteren Zeilen um je $\Delta t = 0,01$ s steigend (Formel anwenden). Spalte B ist der Kondensatorspannung U_C vorbehalten, der Anfangswert 0 wird in Zeile 1 eingetragen. In Spalte C wird, berechnet aus dem Wert von Spalte B mit der Formel nach Gleichung (2), ΔU_C eingetragen. Der Wert von Spalte B in der nächsten Zeile wird immer bestimmt, indem mit einer Formel zu dem Wert von Spalte B der Wert von Spalte C addiert wird. 200 Zeilen sind für die Berechnung des Verlaufes ausreichend. Die Kalkulationsprogramme können den Verlauf dann auch als Kurve darstellen. Die Bearbeitung komplexerer Probleme mit einem Kalkulationsprogramm wird nicht sinnvoll möglich sein. Dazu ist es erforderlich, das Problem mit einer Programmiersprache zu notieren und so ein Computerprogramm zu schaffen.

3.3 Genauigkeit

Der wie bisher beschrieben ermittelte Verlauf der Zustandsgröße $q = U_C$ zeigt eine geringfügige Abweichung vom exakten Verlauf, der mit Gleichung (4) ermittelt werden kann. Die Ursache dafür ist, dass so nicht berücksichtigt wird, dass sich die Zustandsgröße auch innerhalb eines Zeitintervalls ändert. Die Berechnung würde allerdings um so genauer, je kleiner das Zeitintervall gewählt wird. Das verlängert jedoch die für die Simulation benötigte Zeit und kann außerdem zu neuen, so genannten numerischen Ungenauigkeiten führen, da die Änderungen in einem Zeitintervall sehr klein werden. Der Mathematiker lässt das Zeitintervall unendlich klein werden. Er schreibt dann „d“ statt „Δ“.

$$dU_C = dt \frac{1}{R \cdot C} (U - U_C)$$

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{R \cdot C} (U - U_C) \quad (3)$$

Dadurch wird berücksichtigt, dass sich der Anstieg zu jeder Zeit verändern kann. Gleichung (3) wird die Zustandsgleichung des Systems genannt. Die Simulation auf dem

Computer kann nur mit einer endlich kleinen Schrittweite Δt ausgeführt werden. Der dabei entstehende Fehler kann aber mit der Methode von *Runge-Kutta* [5], [6], siehe Tafel 1, klein gehalten werden. Es ist noch erforderlich, Anfangswert der Kondensatorspannung U_{C0} und Schrittweite Δt sowie die Größe von Betriebsspannung, Kondensator und Widerstand festzulegen. Es werden gewählt:

- $U_{C0} = 0$ V
- $\Delta t = 0,01$ s
- $U = 10$ V
- $C = 1$ μ F
- $R = 1$ M Ω

Das Produkt von C und R wird auch als Zeitkonstante T bezeichnet. Hier ergibt sich $T = 1$ s. Die Zeitkonstante charakterisiert die Schnelligkeit des Übergangsvorganges.

Nun kann der Simulations-Algorithmus in einer Programmiersprache notiert und durch einen Computer ausgeführt werden. Dazu wird ausgehend vom Anfangswert immer wiederkehrend die Änderung der Kondensatorspannung mit dem Verfahren von *Runge-Kutta* (Tafel 1) ermittelt und zum bisherigen Wert addiert. Der Aufladevorgang eines Kondensators an konstanter Gleichspannung gehört zu den einfachsten dynamischen Vorgängen der Elektrotechnik. Der Verlauf der Kondensatorspannung kann auch ohne Simulation bestimmt werden. Wenn der Kondensator anfangs ungeladen war ($U_C = 0$), gilt die Gleichung (4).

$$U_C = U \left(1 - e^{-\frac{t}{C \cdot R}} \right) \quad (4)$$

Das Ergebnis ist in Bild 2 gezeigt. Die durch Simulation ermittelte Kondensatorspannung ist als blaue Kurve dargestellt. Zum Vergleich ist die nach Gleichung (4) berechnete Kurve mit einer dünneren grünen Linie eingezeichnet. Es wird deutlich, dass die Simulation völlig mit der Berechnung übereinstimmt.

Literatur

- [1] Bronstein, I. N.; Semendjajaw, K. A.: Ergänzende Kapitel zu Taschenbuch der Mathematik, Leipzig, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft 1987
- [2] Johnson, J. R.: Digitale Signalverarbeitung, München, Wien, Carl Hanser Verlag/Prentice-Hall International Inc. London 1991
- [3] Schönfeld, R.: Grundlagen der automatischen Steuerung; Leitfaden und Aufgaben aus der Elektrotechnik, Verlag Technik Berlin 1984
- [4] Justus, O.: Dynamisches Verhalten elektrischer Maschinen eine Einführung in die numerische Modellierung mit PISICE, Braunschweig/Wiesbaden, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH 1991
- [5] Björck, A.; Dahlquist, G.: Numerische Methoden, München, R. Oldenbourg Verlag 1972
- [6] Schwetlick, H.: Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen, Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979
- [7] Wunsch, G.; Schreiber, H.: Analoge Systeme, Grundlagen, Berlin, Verlag Technik 1988